前　言

以计算机操作为手段，以数学软件为基础的数学实验课，是教育部组织的“面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”课题组的重要研究成果。2000年9月，我们把数学实验课的教学模式引入到高等数学的教学中，对在普通工科高校中如何开设数学实验课进行了研究与实践。我们将高等数学实验课的教学内容分为数学软件基础实验、高等数学基础实验、高等数学验证与演示实验和高等数学应用实验四部分。各部分内容既相互联系又相对独立，课程结束之后要求学生能熟练地运用数学软件进行微积分的基本运算，验证和探索微积分的基本规律，应用微积分的基本知识解决一些实际问题。

一、有针对性地学习数学软件Mathematica

开设数学实验课必须借助于计算机和数学软件，我们采用了目前在国内使用较为广泛的数学软件Mathematica。 Mathematica系统庞大，学生很难一下子掌握其全部功能。因此，我们根据“高等数学实验”课程的需要，在数学软件基础实验中安排了12个实验，每个实验重点学习几个系统函数，熟悉软件的某些功能。数学软件基础实验内容完成之后要求学生具有一定的计算机操作能力，较熟练地掌握数学软件的数值计算功能、绘图功能和微积分运算功能，能够使用Mathematica编写相关的程序。

二、利用Mathematica完成微积分、线性代数的基本运算

学生在学习高等数学的过程中要花费大量的时间进行微积分运算。事实上，Mathematica具有强大的微积分运算功能，往往在几秒钟内就可以完成繁琐、重复的微积分演算。因此，我们在高等数学基础实验中安排了13个实验，每个实验与同济大学编《高等数学》（第四版）教材的有关章节内容相对应。让学生自己动手，用Mathematica进行微积分的运算，将繁杂的推演和运算通过计算机解决，充分体验数学软件准确、迅速、简单、易行的优越性。同时也让学生认识到Mathematica不是万能的，要解决一些综合性问题，还必须将计算机操作与传统的解题方法结合起来，从而也使学生充分认识到学习数学理论知识的重要性。

三、利用Mathematica演示、验证微积分的概念和理论

“高等数学”中有很多的概念和理论，采用传统的教学方法很难进行生动直观的教学，从而影响了学生对所学知识的理解和掌握。高等数学验证与演示实验的目的就是充分运用Mathematica强大的数值计算功能和图形功能，将传统教学方法无法体现出来的概念和理论的内涵，通过计算机屏幕生动、直观地展现出来。比如，极限概念中“无限逼近”的思想、无穷小的阶及其比较、定积分定义中阶梯形面积逼近曲边梯形面积、空间区域及其在坐标面上的投影、无穷级数的收敛性等内容，都可以通过编写简单的程序自由地进行数值验证或通过动画图形从几何直观上进行验证与演示，从而加深对这些概念、理论和方法的理解、记忆和掌握，提高学生对学习的兴趣和积极性。

四、引导学生进行简单的“建模”实践

在高等数学应用实验中我们安排了若干个试验，每个实验安排学生解决一个实际问题，这些实际问题涉及物理、力学、天文、经济、管理、金融等各个方面。尽管有的问题可能比较简单，但通过“提出问题 — 建立模型 — 编程求解 — 计算机处理 — 进一步讨论”这一分析和解决问题的过程，可以使学生受到建立数学模型的初步训练，体会“高等数学”广泛而有趣的应用，培养学生利用所学高等数学知识分析和解决实际问题的能力。

经过几年的实践，我们体会到“高等数学实验”改变了以往传统教学方法中由教师单向传输知识的教学模式，提高了学生在教学过程中的参与程度和实践动手能力，激发了学生学习数学知识的兴趣，加深了学生对所学知识的理解和掌握，弥补了传统教学方法的不足，形成了良好的教与学的互动。

本书第一篇、第四篇由孙卫编写，第二篇、第五篇由张宇萍编写，第三篇由孙卫、张宇萍共同编写，孙卫设计了编写大纲并对全书的内容进行了编排和统稿。黄宝健教授审阅了本书的全部内容并编写了应用实验中的全部求解程序。本书的出版得到了学院领导和教务处的大力支持，在此向他们表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，我们参考了国内出版的一些相关教材，在此向所有作者表示感谢。

编　者

2003年5月于西安

目　录

第一篇　Mathematica 软件基础实验

第二篇　高等数学基础实验

第三篇　高等数学验证与演示实验

第四篇　高等数学应用实验

第五篇　线性代数实验

第一篇 Mathematica 软件基础

实验 1-1 Mathematica 简介

实验目的

1. 了解 Mathematica 的基本功能。
2. 了解从 Mathematica 中获取信息的方法。
3. 掌握 Mathematica 的启动、运行和退出。
4. 了解 Mathematica 的主菜单和工作按钮的使用方法。

实验指导

一、Mathematica 简介

我们在学习数学的过程中，要花大量的时间用于推导公式、画图、计算数据，其中绝大部分是按照固定的公式、法则进行的繁琐和重复的劳动。随着计算机技术的不断发展，今天，人们已经开发出一些能够帮助处理和解决数学问题的软件系统。

由美国物理学家 Stephen Wolfram 领导的一个小组开发的 Mathematica 是第一个数学软件系统。它的主要功能包括三个方面：符号演算、数值计算和图形。Mathematica 可以完成许多符号演算和数值计算的工作。例如，它可以进行包括数值计算、初等代数、高等代数、高等数学等各种运算。Mathematica 还具有强大的绘图功能，使用 Mathematica 可以非常方便地做出以各种方式表示的一元和二元函数的图形，还可以制作多画面连续放像的动画函数图形。

Mathematica 系统不仅仅具有上述这些功能，而且它还把这些功能融合在一个系统里，使它们成为一个有机整体。在使用 Mathematica 的过程中使用者可以根据自己的需要一会儿从做符号演算转去作图形，一会儿又转去做数值计算，这种灵活性为使用者带来很大的方便。Mathematica 还是一个很容易扩充的系统，它用于描述符号表达式和对它们的计算的一套记法实际上构成了一个功能强大的程序设计语言，用这种语言可以比较方便地定义用户需要的各种函数，完成用户需要的各种工作。

Mathematica 是一个交互式的计算机系统。用户通过输入设备向系统发出计算的指令，系统在完成指定的计算工作后把计算结果告诉用户，从这个意义上来说，Mathematica 系统类似一个高级的计算器，它的使用方法也与使用计算器类似，只是它的功能比一般的计算器强大得多，能接受的命令也丰富得多。

二、Mathematica 的启动

在 Windows 环境下安装好 Mathematica。用鼠标双击 Mathematica 的图标，稍停片刻则显示如图 1-1-1 的工作屏幕。

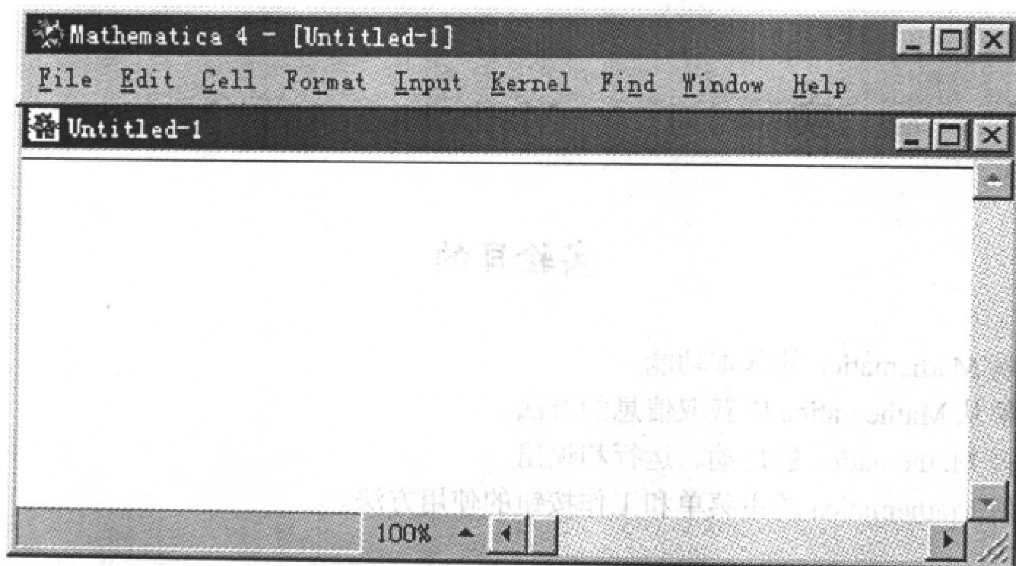


图 1-1-1　Mathematica 的工作屏幕

Mathematica 的工作屏幕上共有 9 个主菜单。菜单中每个项目的意义和使用方法可通过联机帮助系统的 Help 菜单进行查询。

三、退出和重新进入 Mathematica

进入 Mathematica 后，它会自动在计算机的硬盘上建立一个临时文件。若想退出 Mathematica，可以用 Alt+F4 组合键，也可以选择 File 菜单中的 Exit 项。

每次在 Windows 下退出 Mathematica 时，Mathematica 都会询问你是否想保存本次工作，如果你想保存你的工作结果，可以回答“Y”。此时系统会要求你指定文件名，你可以任意给定一个文件名，确认后，系统就将该文件保存在 Mathematica 的子目录下。以后若想使用本次保存的结果，可以通过 File→Open/Import 菜单读入。

退出 Mathematica 后，用鼠标双击 Mathematica 的图标，可再次进入 Mathematica 系统。

四、Mathematica 的输入、输出和运行

1. Mathematica 的输入方式

（1）通过键盘直接输入。

（2）通过 File 主菜单中的“Palettes”选项进行输入。

Mathematica 要求用户的输入要符合系统内部的规定，若不符合规定，Mathematica 将拒绝执行并提醒用户重新输入。Mathematica 会在用户输入有错误的地方给出提示信息。

Mathematica 能够处理多种类型的数据形式：数学公式、集合、矩阵以及图形等。这些数据从形式上看是很不一样的，但在 Mathematica 系统中，各种数据形式都被看成是同种类型，均称为**表达式**。

在 Mathematica 的工作屏幕上，输入一行或多行表达式，例如：

In[]:=**Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi}]**

然后同时按下 Shift 键和 Enter 键，系统即可执行运算，运行结果如图 1-1-2 所示。

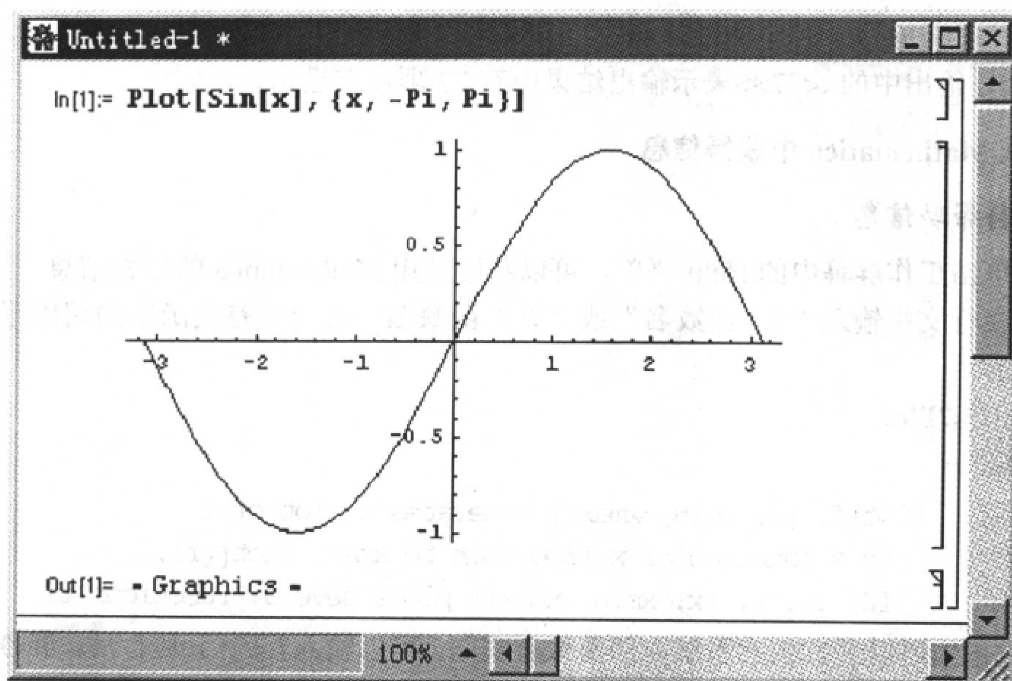


图 1-1-2　完成第 1 个运算后的窗口

图 1-1-2 中符号 In[1]表示第 1 个输入，Out[1]表示第 1 个输出的结果，这两个符号是机器自动给出的。用户的每一次输入和 Mathematica 对应的输出都被称为“细胞（cell）”，在 Mathematica 的工作屏幕上用“[]”来标识。

2. 控制系统结果输出的方法

（1）在输入表达式的后面加分号（;）后再运行，则屏幕不显示运行结果。

（2）使用系统函数 **Short** 可以简化系统的结果显示，如表 1-1-1 所示。

表 1-1-1　简化结果显示的系统函数 Short

函　　数	说　明
Short[表达式]　或　表达式// **Short**	给出一个 1 行的计算结果显示
Short[表达式,**n**]	给出一个 n 行的计算结果显示

例如：

In[]:=**x = 2;**

y = 3;

z = x+y

Out[]=

5

In[]:=t=Expand[(1+x+y)^12];
Short[t]

Out[]=

$1+12x+66x^2+220x^3+495x^4+792x^5+924x^6+$
$<<77>>+220x^3y^9+66y^{10}+132xy^{10}+66x^2y^{10}+12y^{11}+12xy^{11}+y^{12}$

上述输出中的<<77>>表示输出结果中有 77 项没有显示。

五、从 Mathematica 中获得信息

1. 获得帮助信息

（1）单击工作屏幕中的 Help 菜单，可以获取使用 Mathematica 的各种信息。

（2）在行文中输入“？ 函数名”或“？？函数名”可得到有关函数的调用形式和相关说明。例如：

In[]:=?Plot

Out[]=

```
Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f
  as a function of x from xmin to xmax. Plot[{f1,
  f2, ... }, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.
```

如果你想知道以 P 打头的系统内部函数有哪些，可以输入？**P***，运行后，屏幕上将显示以 P 开头的所有函数，你可以找出感兴趣的函数，去查看其说明。

2. 提示信息

当用户的输入有错误时，Mathematica 将给出很详细的提示信息来指出用户的错误。例如：

In[]:=Plot[Sin[x]]

Out[]=

```
Plot::argmu : Plot called with 1
  argument; 2 or more arguments are expected.
```

提示信息告诉我们上述输入中 Plot 函数只给出了一个参数，不符合系统函数的要求，需要给出两个或更多的参数。

六、Mathematica 的基本功能

1. Mathematica 的数值计算功能

In[]:=3+5-4

Out[]=

4

In[]:=2^8

Out[]=

256

2. Mathematica 的符号计算功能

（1）用 Mathematica 求积分：

In[]:=**Integrate[Exp[x] * Sin[2x],x]**

Out[]=

$$-\frac{2}{5}e^{x}\text{Cos}[2x]+\frac{1}{5}e^{x}\text{Sin}[2x]$$

（2）用 Mathematica 解方程：

In[]:=**Solve[Sqrt[x]+a==2x,x]**

Out[]=

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{8}\left(1+4a-\sqrt{1+8a}\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{8}\left(1+4a+\sqrt{1+8a}\right)\right\}\right\}$$

（3）用 Mathematica 进行微分运算：

In[]:=**D[Exp[x] * Sin[x],x]**

Out[]=

$$e^{x}\text{Cos}[x]+e^{x}\text{Sin}[x]$$

（4）用 Mathematica 展开多项式：

In[]:=**Expand[(x+y)^3]**

Out[]=

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

3. Mathematica 的绘图功能

用 **Plot** 函数画 $y=\sin x+\sin 2x$ 当 $x\in(-2\pi,2\pi)$ 时的图形，如图 1-1-3 所示。

In[]:=**Plot[Sin[x]+Sin[2x],{x,-2Pi,2Pi}]**

Out[]=

- Graphics -

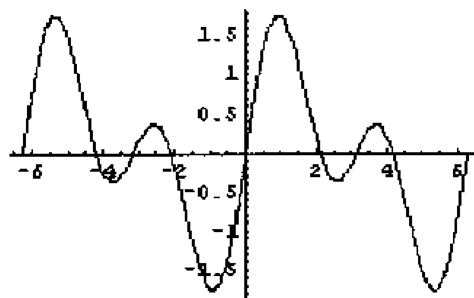


图 1-1-3　画二维图形

用 **Plot3D** 函数画 $z=\sin xy$ 当 $x\in(0,4), y\in(0,4)$ 时的图形，如图 1-1-4 所示。

In[]:=**Plot3D[Sin[x*y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}, PlotPoints -> 50]**

Out[]=

- SurfaceGraphics -

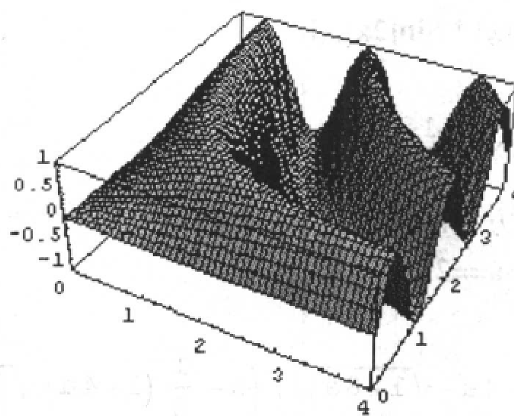


图 1-1-4　画三维图形

实验内容

练习 1　试做几次进入和退出 Mathematica 的练习。

练习 2　试做几次打开新文件、关闭当前文件、存盘退出和重新进入已存盘文件的练习。

练习 3　练习通过联机帮助系统获取 Mathematica 的基本菜单的功能和使用方法。



实验 1-2　Mathematica 中的数值运算

实验目的

1. 了解 Mathematica 系统内数的类型与表示方法。
2. 掌握系统内四则运算及乘方运算的基本规则。
3. 熟悉系统内计算结果的输出形式。
4. 掌握系统内常用的数学函数。
5. 掌握 **Head, N, Sum** 函数。

实验指导

一、系统中数的类型与表示

Mathematica 系统中的数分为两大类：一类是直接用数字写出来的数，一类是系统的内部常数。Mathematica 的简单数值类型有四种，见表 1-2-1。

表 1-2-1 Mathematica 中的数值类型

类 型	说 明	例
Integer	任意长度的整数，用一串连续的数字表示，数字之间不能有空格或其他字符，是精确数	1234， 8
Rational	有理数，用分式的形式表示或用除号（斜线 /）分隔分子分母的方式表示，是精确数	378/123，2/3
Real	实数，可以有一定精度。也称浮点数，用中间有一个小数点的数字串表示	.3，34.684，2.
Complex	复数，实部和虚部可为整数、有理数和实数	3+2I， 8-6.543I

例 1.2.1 用函数 **Head** 判断数值的类型。

In[]: = **Head[2]**

Out[] =

```
Integer
```

In[]: =**Head[2.]**

Out[]:=

```
Real
```

In[]: =**Head[2/3]**

Out[]=

```
    Rational
In[]:=Head[2 + 3I]
Out[]=
    Complex
```

二、系统中的数学常数

许多常用的数学常数在 Mathematica 里都有定义。

表 1-2-2　Mathematica 中的数学常数

表 达 式	含 义
Pi	$\pi=3.14159\cdots$
E	自然对数的底 $e=2.71828\cdots$
Degree	1 度，$\pi/180$
I	虚数单位，$i=\sqrt{-1}$
Infinity	∞（无穷大）

三、数值的输出格式

数值的输出格式函数见表 1-2-3。

表 1-2-3　常用的数值输出格式函数

函 数	说 明
ScientificForm	以科学计数法表示数值
EngineeringForm	以工程计数法表示数值
AccountingForm	以标准统计计数法表示数值

例 1.2.2　以常用的数值表示法输出计算结果。

```
In[]:=t={2.3^5, 4.5^-5, 6.7^7};
    ScientificForm[t]
Out[]=
    {1.2167×10^1, 5.41923×10^-4, 6.06071×10^5}
In[]:=EngineeringForm[t]
Out[]=
    {12.167, 541.923×10^-6, 606.071×10^3}
In[]:=AccountingForm[t]
Out[]=
    {12.167, 0.000541923, 606071.}
```

四、 Mathematica 中的数值运算

Mathematica 最基本的功能是进行算术运算，见表 1-2-4。

表 1-2-4　Mathematica 中基本的运算符号

运算法则	运算符号	举例	优先级
加法	+	**2+3**	1
减法	-	**3/8-1/4**	1
乘法	* 或空格	**1.2*5**	2
除法	/	**3.4/5**	2
乘方	^	**2^6**	3

例 1.2.3　Mathematica 中的数值运算。

```
In[]:=2*(3+4)-2^(2+1)
Out[]=
        6
In[]: =(3+2I)+(5-6I)
Out[]=
        8 - 4 i
In[]:= 2.4^45
Out[]=
```

1.28678×10^{17}

注意 （1） 可以用括号改变运算的顺序；

（2） 对于一般的算术运算符，连续的几个同级运算从左到右进行,但乘方运算的结合顺序不同，是从右到左进行的；

（3） 负号用减号表示，直接写在数的前面。

五、使用前面的计算结果

调用已有结果的方式如表 1-2-5 所示。

表 1-2-5　　Mathematica 中调用前面结果的方式

符　号	含　义
%	代表上一个输出的结果
%%	代表上面倒数第二个输出语句的结果
%n	代表上面第 n 个输出语句的结果

例 1.2.4　使用前面的计算结果。

```
In[]:= 2^2
```

```
Out[]=
    4
In[]:=%+6
Out[]=
    10
In[]:=%%-2
Out[]=
    2
In[]:=%2 * %3
Out[]=
    20
```

六、运算的精确值和近似值

在 Mathematica 中，如果参加计算的都是精确数，则输出的结果是精确数。如果在算式中既有近似数，又有精确数，则输出的结果是近似数。

例 1.2.5 运算的精确值和近似值。

```
In[]:= 2^10
Out[]=
    1024
In[]:= 2.^10
Out[]=
    1024.
In[]:= 1/3+2/7
Out[]=
    13
    --
    21
In[]:= 1./3+2/7
Out[]=
    0.619048
```

为了得到计算结果的近似值，可以用系统函数来控制输出结果的精度。

表 1-2-6 控制输出精度的系统函数

函　数	说　明
N[表达式]或//N	计算表达式的数值并输出近似值
N[表达式，n]	计算表达式的数值，并给出 n 位十进制的近似值

例 1.2.6 使用 N 函数控制输出结果的精度。

```
In[]:=E
```

```
Out[]=
    e
In[]:= N[E, 20]
Out[]=
    2.7182818284590452354
In[]:=2Pi+Pi+1
Out[]=
    1 + 3π
In[]:=%// N
Out[]=
    10.4248
In[]:=N [1/3+2/7]
Out[]=
    0.619048
In[]:=N [1/3 + 2/7, 40]
Out[]=
    0.6190476190476190476190476190476190476190
```

七、求和与求积

求和与求积函数见表 1-2-7。

表 1-2-7　Mathematica 中的基本求和与求积函数

函　数	说　明
Sum[f[i],{i,min,max}]	计算和式 $\sum_{i=\min}^{\max} f_i$
Sum[f[i],{i,min,max,di}]	以步长 *di* 计算和式 $\sum_{i=\min}^{\max} f_i$
Product[f[i],{i,min,max}]	计算乘积式 $\prod_{i=\min}^{\max} f_i$
Product[f[i],{i,min,max,di}]	以步长 *di* 计算乘积式 $\prod_{i=\min}^{\max} f_i$

例 1.2.7　用 Sum 函数求和。

```
In[]:=Sum[n^2,{n,1,100}]
Out[]=
    338350
In[]:=Sum[n * x^n,{n, 1, 10, 2 }]
Out[]=
    x + 3 x^3 + 5 x^5 + 7 x^7 + 9 x^9
```

实验内容

练习 1　计算 π,e 的近似值，要求精确到 10，20，50，100 位的小数。

练习 2　检查 $\pi,e,20,2^{\frac{1}{3}},2+3i$ 的数据类型。

练习 3　计算下列各值:

(1) 215^{18}；　(2) $\sqrt{\pi^2+1}$；　(3) $\sin 35°$；　(4) $\log_3 246$；　(5) $\tan 0.45$ 。

练习 4　自由练习各种数值运算。

实验 1-3 Mathematica 中的变量与函数

实验目的

1. 了解变量与函数的命名规则和赋值方法。
2. 掌握 Mathematica 系统中常用的数学函数。
3. 掌握自定义函数的方法。
4. 了解函数 **Print, If, Which** 的使用方法。

实验指导

一、变量与函数的命名规则

（1）变量名和函数名可以是任意长度的字符或字符串，其中不得有空格及其他运算符号，变量名和函数名不得以数字开头。

（2）Mathematica 内部具有的变量和函数的第一个字母必须大写，后面用小写，当函数名可以分成几个段时，每一个段的头一个字母用大写，后面的字母用小写，如：**ArcSin[x], ArcSinh[x]**等。

（3）函数的参数表用方括号括起来，不能用圆括号。有多个参数的函数，参数之间用逗号分隔。

（4）为与系统内部变量和函数相区别。自定义变量和函数名的开头应使用小写字母。

（5）自定义函数时，方括号中自变量的左边必须有一个下划线“_”。

二、变量的赋值方法

（1）Mathematica 用等号“=”表示给变量赋值，赋值号（等号）的左端应当是一个可以赋值的对象（变量），右端可以是任何表达式；

（2）用“**函数名/.自变量名称->自变量值**”的形式给一个变量赋值，或用“**函数名/.{变量名称->变量值，…，变量名称->变量值}**”的形式给多个变量赋值。

例 1.3.1 用等号“=”给变量赋值。

In[]:=**x = 5** （* 给变量 x 赋值 5 *）

Out[]=

5

In[]:= **u1 = u2 = 2** （* 给变量 u_1,u_2 赋值 2 *）

Out[]=

2

例 1.3.2 用“**函数名/.{变量名称->变量值，…，变量名称->变量值}**”的形式给多个变量赋值。

```
In[]:=P1=3x^2+1          (* 把一个多项式赋值给变量 P1 * )
Out[]=
    1+3x^2
In[]:=P1/.x->2           (* 把 2 赋值给 P1 中的变量 x * )
Out[]=
    13
In[]:=P1/.x->(t+1)       (* 把多项式 P1 中所有的 x 替换成 (t+1) *)
Out[]=
    1+3(1+t)^2
In[]:=P2=3x^2+x * y+x * y^3
Out[]=
    3x^2+xy+xy^3
In[]:=P2/.{x->2,y->3}    (* 给变量 x 赋值 2，变量 y 赋值 3 *)
Out[]=
    72
```

三、系统内数学函数

Mathematica 系统提供几百个常用的数学函数，包括一些基本初等函数和一些特殊函数，表 1-3-1 列出了工科数学中常用的初等函数。

表 1-3-1　Mathematica 中的基本初等函数和常用特殊函数

函　数	说　明	函　数	说明
Sqrt[x]	平方根函数	**Sinh[x]**	双曲正弦函数
Exp[x]	指数函数	**Cosh[x]**	双曲余弦函数
Log[x]	自然对数函数 ln x	**Tanh[x]**	双曲正切函数
Log[a ,x]	以 a 为底的对数函数	**ArcSinh[x]**	反双曲正弦函数
Sin[x]	正弦函数	**ArcCosh[x]**	反双曲余弦函数
Cos[x]	余弦函数	**ArcTanh[x]**	反双曲正切函数
Tan[x]	正切函数	**Max[e1,…,en]**	求 $e_1, e_2 \cdots, e_n$ 的最大值
Cot[x]	余切函数	**Min[e1,…,en]**	求 $e_1, e_2 \cdots, e_n$ 的最小值
ArcSin[x]	反正弦函数	**Abs[x]**	绝对值函数
ArcCos[x]	反余弦函数	**!**	阶乘函数
ArcTan[x]	反正切函数		

四、自定义函数

虽然 Mathematica 提供了大量的系统函数，但是在很多实际应用中可能还不够用，用户可以自己定义新的函数，自定义的函数可以像系统内部函数一样使用。

例 1.3.3 定义二元函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan x$ 并求函数值。

```
In[]:=f[x_,y_]:=x^2+y^2-x * y * Tan[x/y]; f[x,y]/.{x->1,y->1}
Out[]=
      2 - Tan[1]
In[]:=f[x,y]/.{x->u,y->v}
Out[]=
      u^2 + v^2 - u v Tan[u/v]
In[]:=f[x_,y_]:=Log[x] * Log[y]           (* 重新定义这个函数 *)
       ?f                                (* 查看函数的定义 *)
Out[]=
       Global`f                          (* f 为全局变量 *)

       f[x_, y_] := Log[x] Log[y]        (* 旧定义已被新定义取代 *)
```

利用条件语句 **If[条件,表达式 1,表达式 2]** 和 **Which[条件 1,表达式 1,条件 2,表达式 2…条件 n,表达式 n]**可以定义分段函数。

例 1.3.4 定义分段函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le -1 \\ \sin 2\pi x, & -1<x\le 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$ 并画出其图形。

```
In[]:= f[x_]:=Which[x<=-1,x+1,x<=1,Sin[2Pi * x],x>1,Log[x]];
       Plot[f[x],{x,-4,4}]
Out[]=
       - Graphics -
```

输出图形如图 1-3-1 所示。

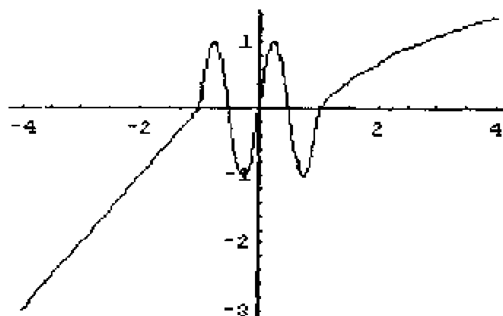


图 1-3-1

例 1.3.5 定义分段函数 $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$ 并画出函数的图形。

```
In[]:= g[x_]:=If[x<=1,x,1];
       Plot[g[x],{x,-2,2}]
```

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-3-2 所示。

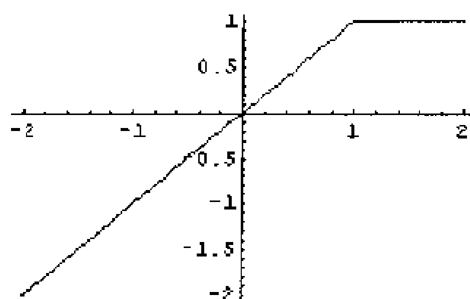


图 1-3-2

In[]:=Print[g[-2], " ", g[0], " ", g[2]] （* 分别输出 $g(-2), g(0), g(2)$ 的函数值 *）

Out[]=

-2 0 1

Print 是系统的基本屏幕输出函数，它的使用形式是：**Print[expr1,expr2,...]**，它在屏幕上依次将表达式 1，表达式 2 等显示出来。两个相邻的表达式输出之间不留空格，整个输出完毕后换一行。如果需要在表达式之间留空格，可以在它们之间加上包含空格的字符串。

五、变量与函数的清除

一旦给某一变量或函数赋值后，这值就一直保持不变。一般，当一个变量或函数使用完之后，最好清除掉这个变量或函数的定义，否则后面的使用中可能会出现混乱。清除的方法是用 **Clear[变量]** 或 **Clear[函数]**。

例 1.3.6 自定义函数并清除。

In[]:=f[x_]:=1/2 * ArcCos[x/2] （* 定义函数并求函数值 *）

f[Sqrt[2]]

Out[]=

$\frac{\pi}{8}$

In[]:=f[0]

Out[]=

$\frac{\pi}{4}$

In[]:=?f （* 使用?f 查看函数 f 的定义 *）

Out[]=

Global`f （* f 为一个全局变量 *）

f[x_] := $\frac{1}{2}$ ArcCos[$\frac{x}{2}$]

```
In[]:=Clear[f]                  (* 使用 Clear 函数清除 f *)
      ?f                        (* 再查看 f )
Out[]=
    Global`f                    (* f 已被清除 *)
```

实验内容

练习 1　设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0+h)$。

练习 2　设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3} \\ 0, & |x|\geq\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi(\frac{\pi}{6})$，$\varphi(\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-\frac{\pi}{4})$，$\varphi(-2)$。

练习 3　判断函数 $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性。

练习 4　设 $f(x)=2x^2+6x-3$，求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的表达式，并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中，哪个是奇函数，哪个是偶函数。

练习 5　火车站收取行李运费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从上海到某地收 0.15 元/kg。当超过 50kg 时超重部分按 0.25 元/kg 收费。

（1）试用自定义函数表示上海到该地的行李费 y 与重量 x 之间的函数关系；

（2）选择适当 x 值，计算出相应的收费金额 y。

练习 6　自由练习定义各种函数并进行各种运算。

实验 1-4　二维图形的描绘

实验目的

1. 了解 Mathematica 的绘图原理。
2. 掌握利用 Mathematica 绘制一元函数图形的基本方法。
3. 掌握 **Plot**，**ParmetricPlot**，**ListPlot**，**Show** 函数。
4. 会利用 **Plot** 函数的可选项对图形外观进行修饰。

实验指导

一、作图原理

计算机在画函数图形时所用的基本方法类似于描点法。机器首先对所给区间里的一定数量的点（通常取区间的均分点）计算函数值，并画出这些点$(x, f(x))$，然后依x的大小从小到大把所对应的点用直线段连接成一条曲线（实际上是一条折线），就把它作为函数在观察区域内的图形。值得注意的是，点$(x, f(x))$可能由于不在观察区间内而不画出。这时，直线段的连接将跳过这一点，从而使图形产生一定的变形，严重时可以与真实的函数图形相差甚远。因此在作图时，应注意选择合适的观察区域。

例 1.4.1　分别运行以下表达式，注意观察输出结果。

（1）**Plot[x^2 +3 ,{x, -2, 2},PlotRange->{-2, 2}]**

（2）**Plot[x^2 +3 ,{x, -4, 4},PlotRange->{-4, 4}]**

（3）**Plot[x^2 +3 ,{x, -10, 10},PlotRange->{-5, 30}]**

二、基本绘图函数 Plot

Plot 函数的使用方法，如表 1-4-1 所示。

表 1-4-1　基本绘图函数 Plot 的使用方法

函　数	意　义
Plot[f[x],{x,a,b},可选项]	画出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的图形
Plot[{f1[x],f2[x],…},{x,a,b},可选项]	画出多个函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在 (a,b) 内的图形

例 1.4.2　用 **Plot** 函数画出 $y=\tan x$ 当 $x\in(-2\pi, 2\pi)$ 时的图形。

In[]:= **Plot[Tan[x],{x,-2Pi,2Pi}]**

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-1 所示。

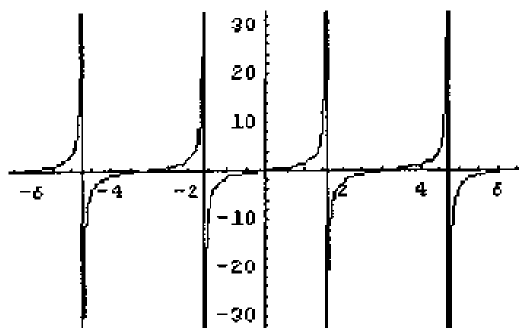


图 1-4-1

例 1.4.3 将函数 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ 当 $x\in(-2\pi,2\pi)$ 时的图形画在一张图上。

In[]:=Plot[{Sin[x],Sin[2x]},{x,-2Pi,2Pi}]

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-2 所示。

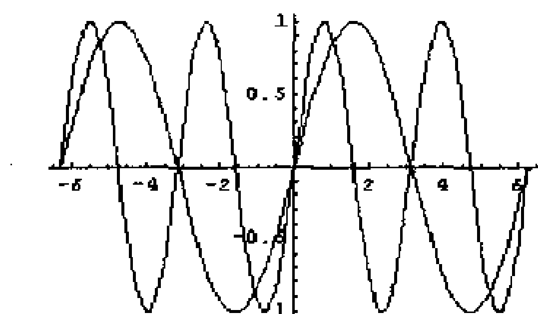


图 1-4-2

例 1.4.4 将函数 $f_0(x)=x, f_1(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}, f_2(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$ 和 $y=\sin x$ 的图形画在一张图上。

In[]:=f0=x;f1=x-x^3/6; f2= x-x^3/6+x^5/120;

Plot[{Sin[x],f0,f1,f2,},{x,0,Pi}, AspectRatio->Automatic,AxesLabel->{"x", "y"}]

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-3 所示。

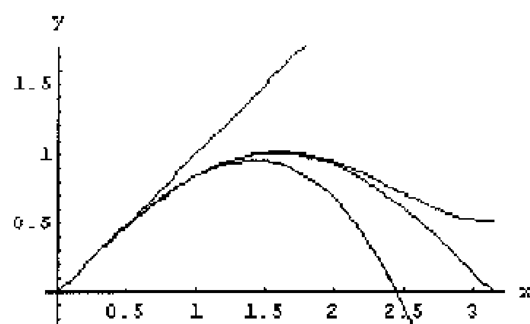


图 1-4-3

三、Plot 函数的可选项

常用的 **Plot** 函数的可选项见表 1-4-2。

表 1-4-2　Plot 函数常用的可选项

可 选 项	默 认 值	说　明
PlotRange	**Automatic**	指定作图范围。可用**{y1,y2}**的形式要求绘出纵坐标在$[y_1, y_2]$内的图形
AspectRatio	**0.618:1**	指定作图的纵横比例，若按实际情况作图，则需设置为 **Automatic**
Axes	**Automatic**（画坐标轴并自动确定设置坐标轴的位置）	是否画坐标轴及设置坐标轴的中心位置。选值为 **None** 时表示不设坐标轴
AxesLabel	**None**（不做标记）	可以用{“字符串 1”，“字符串 2”}形式指定横坐标轴和纵坐标轴的标记
Ticks	**Automatic**（自动确定坐标刻度）	规定坐标轴上刻度的位置，可以用 **None** 要求不标出坐标轴刻度
PlotStyle	**Automatic**	指定曲线的样式，取默认值时，图形为黑实线。可通过可选项，改变曲线的样式
PlotPoints	**15**	设置采样函数的点数，对于函数值变化剧烈的表达式，应设定较大的点数
DisplayFunction	**$DisplayFunction**	用什么机制显示图形。可用 **Identity** 表示只生成图形，但是现在不显示

Plot 函数表达式中的可选项是用来对图形的外表进行修饰的函数。可选项可以有，也可以没有。如果没有，**Plot** 就会按照系统内部默认的方式作图。可选项的表示方法是：**可选项名->可选项值**。画一个图形，可以列出多个可选项，以逗号隔开、依次排列。

例 1.4.5 画出函数 $y = \tan x$ 在 $x \in (-2\pi, 2\pi)$ 内的图形，指定作图范围、坐标轴的纵横比例和坐标轴的标记。

```
In[]:=Plot[Tan[x],{x,-2Pi,2Pi},PlotRange->{-5,5},AspectRatio->Automatic,
    AxesLabel->{"x", "Tan[x]"}]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 1-4-4 所示。

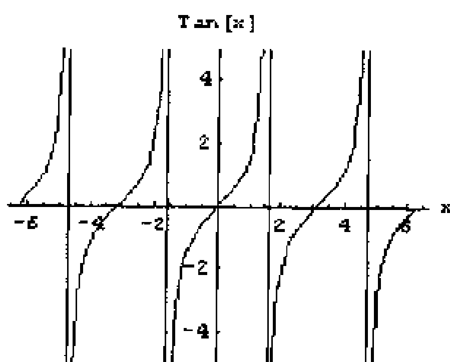


图 1-4-4

对于函数值变化比较剧烈的表达式，应当取一个恰当的绘图区间和比较大的 **PlotPoints** 值，以避免作出的图形在一些区域过分偏离实际的图形。

例 1.4.6 比较以下输入和输出结果的不同。

```
In[]:=Plot[Sin[10x],{x,-Pi,Pi}]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 1-4-5 所示。

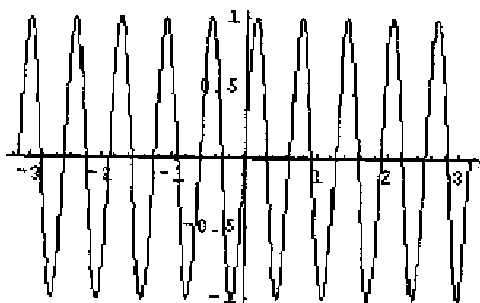


图 1-4-5

In[]:=Plot[Sin[10x],{x,-Pi/5,Pi/5},PlotPoints->100]

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-6 所示。

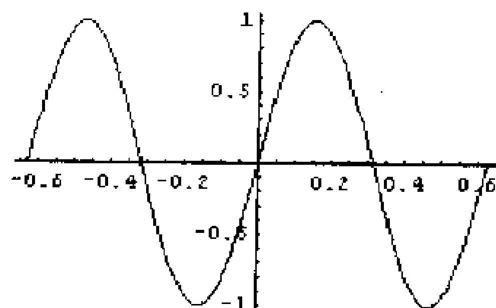


图 1-4-6

表 1-4-3　PlotStyle 函数常用的可选项

可　选　项	说　明
Thickness[t]	要求曲线的宽度值为 t
GrayLevel[i]	描述曲线使用的灰度，其中 i 是区间 [0,1] 中的一个数，0 表示黑色，1 表示白色
RGBColor[r,g,b],	曲线红色、绿色、蓝色的强度，其取值可由 **Input** 菜单中的 **color Seletcet** 项确定
Dashing[{d1,d2,...}]	曲线用虚线表示，虚线长度为 $d_1, d_2, \cdots$

如果用 **Plot** 函数画两个或多个函数的图形，可以用 **PlotStyle** 为每条曲线设定一个不同的方式，这时必须把描述一条曲线的项放在一个表里作为 **PlotStyle** 值的一个子表。

例 1.4.7 分别用红、绿、蓝三种颜色画出 $y=\sin x, y=\sin 2x, y=\sin 3x$ 的图形。

In[]:=Plot[{Sin[x],Sin[2x],Sin[3x]},{x,0,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
RGBColor[0,1,0],RGBColor[0,0,1]}]

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-7 所示。

例 1.4.8 分别用不同的线型和颜色修饰 $y=\sin x, y=\sin 2x$ 的图形。

In[]:=Plot[{Sin[x],Sin[2x]},{x,-2Pi,2Pi},PlotStyle->{{RGBColor[0,1,1],
Thickness[0.01]},{RGBColor[1,0,1],Dashing[{0.05,0.05}]}}]

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-8 所示。

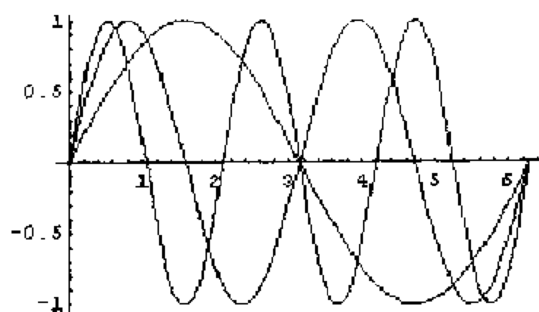


图 1-4-7

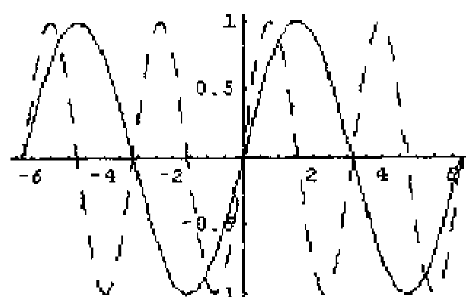


图 1-4-8

四、二维参数图形

Mathematica 还能方便地画用参数形式表示的一元函数的图形。使用的函数是 **ParametricPlot**，它的使用形式有两种：

（1）**ParametricPlot[{x(t),y(t)},{t,下限,上限},可选项]**

（2）**ParametricPlot[{x1(t),y1(t)}, {x2(t),y2(t)}…{t,下限,上限},可选项]**

ParametricPlot 接受与 **Plot** 一样的可选项，其作用也一样。

例 1.4.9 利用 **ParametricPlot** 函数画单位圆 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的图形。

In[]:=**ParametricPlot[{Sin[t],Cos[t]},{t,0,2Pi}, AspectRatio->Automatic]**

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-9 所示。

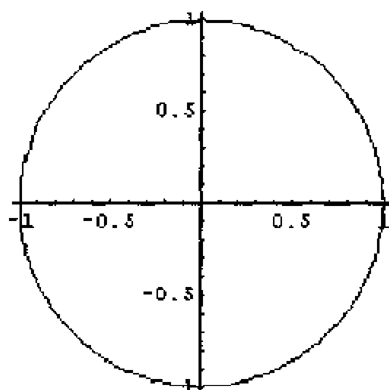


图 1-4-9

例 1.4.10 利用 **ParametricPlot** 函数画星形线$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的图形。

```
In[]:=ParametricPlot[{2Cos[t]^3, 2Sin[t]^3 },{t,0,2Pi}, AspectRatio->Automatic]
Out[]=
     - Graphics -
```

输出图形如图 1-4-10 所示。

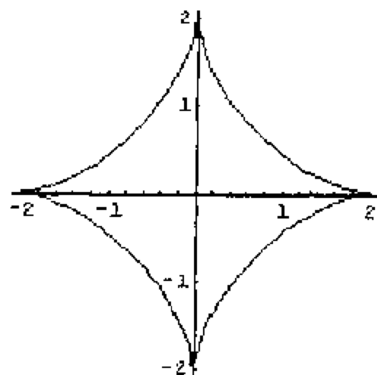


图 1-4-10

利用 **ParametricPlot** 还可以画出用极坐标表示的函数的图形。

例 1.4.11 利用 **ParametricPlot** 函数画心形线 $r = 2(1-\cos\theta)$ 的图形。

```
In[]:=r1[t_]:=2(1-Cos[t]);
      ParametricPlot[{r1[t]*Cos[t],r1[t]*Sin [t]},{t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic]
Out[]=
     - Graphics -
```

输出图形如图 1-4-11 所示。

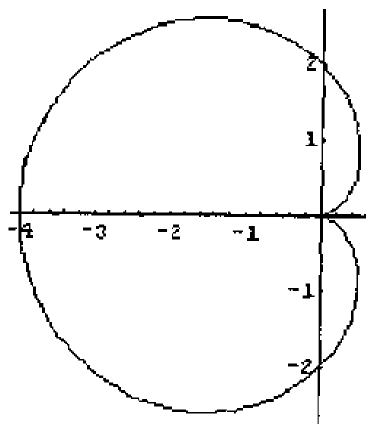


图 1-4-11

例 1.4.12 利用 **ParametricPlot** 函数画三叶玫瑰线 $r = 2\cos 3\theta$ 图形。

```
In[]:=r2[t_]:=2Cos[3t];
      ParametricPlot[{r2[t]*Cos[t], r2[t]*Sin[t]},{t,0,4Pi},
           AspectRatio->Automatic]
```

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 1-4-12 所示。

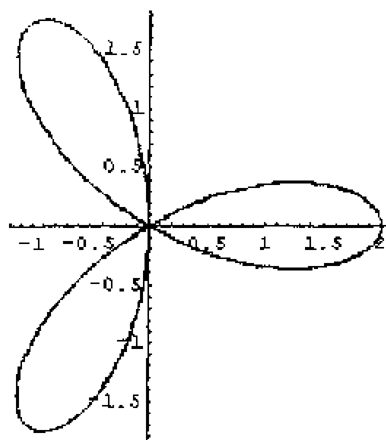


图 1-4-12

五、平面数据作图函数

Mathematica 可以根据一组数据做出图形，使用的函数形式是：**ListPlot[数据，可选项]**，见表 1-4-4。

表 1-4-4　ListPlot 函数常用的可选项

可选项	默认值	说　明
PlotJoined	**False**	是否用直线连接各点。可用 **True** 表示得到连接这些点的折线
PlotStyle	**Automatic**	所画的点或直线的类型

例 1.4.13　画数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的前 100 项的散点图。

```
In[]:=t=Table[(1+1/n)^n,{n,1,100}];
   ListPlot[t]
Out[]=
   - Graphics -
```

输出结果如图 1-4-13 所示。

六、图形的重新显示、组合和输出

使用系统函数 **Show[图 1,图 2,…,可选项—>可选项值]**可把以前作过的图形进行组合、重新显示。

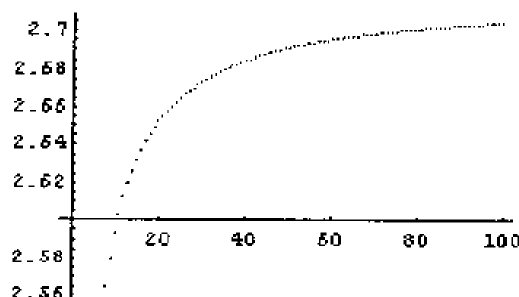


图 1-4-13

例 1.4.14 将 $y=x^2$ 和 $y=x$ 的图形重新组合显示在图上（如图 1-4-14 所示）。

```
In[]:=f1=Plot[x^2,{x,-2,2}];
    f2=Plot[x,{x,-2,2}];
    Show[f1,f2, PlotRange->{-2,2},AspectRatio->Automatic,
        AxesLabel->{"x","y" }]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出结果如图 1-4-14 所示。

例 1.4.15 将抛物线 $y=x^2$ 和单位圆 $x^2+y^2=1$ 的图形组合显示。

```
In[]:=f1=Plot[x^2,{x,-2,2}];
    f2=ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2Pi}];
    Show[f1,f2, PlotRange->{-2,2},AspectRatio->Automatic,
        AxesLabel->{"x","y" }]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 1-4-15 所示。

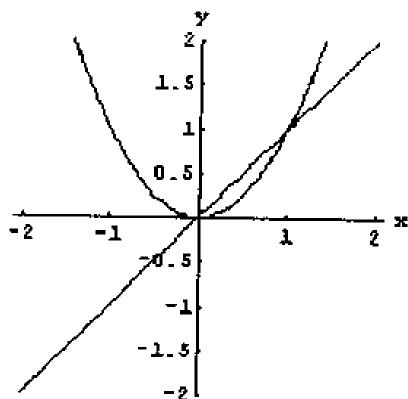


图 1-4-14

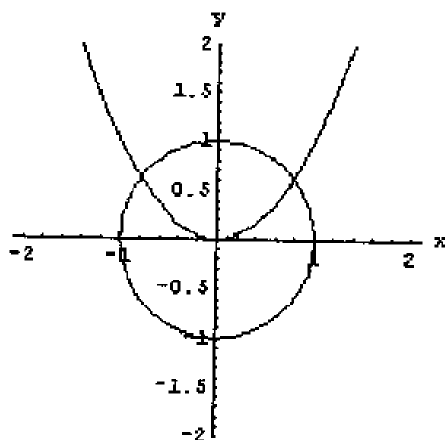


图 1-4-15

实验内容

练习 1　描绘基本初等函数的图形。

练习 2　在一张图上画出函数 $y = x^n$ 的图形 $(n = 1,2,\cdots,10)$。

练习 3　画出下列图形（选择不同的区间、曲线颜色，点数，加图名、坐标）。

(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$；　　(2) $y = x + \sin x$；　　(3) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$；

(4) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$；　　(5) $r = \mathrm{e}^{a\theta}$。

练习 4　自由练习绘制各种函数的图形，并用可选项对图形的外观进行修饰。

练习 5　对 $h = 0.1$，0.01，0.001，0.0001 作 $g(x) = \dfrac{\sin[x+h] - \sin[x]}{h}$ 的图形（将 4 个图形放在一张图上），比较它们与 $y = \cos x$ 图形的差异，并猜出 $y = \sin x$ 的导函数。

实验 1-5　Mathematica 的代数运算

实验目的

1. 会利用 Mathematica 进行多项式的各种基本运算。
2. 会利用 Mathematica 进行有理式的各种基本运算。
3. 会利用 Mathematica 求解方程（组）。
4. 掌握 **Expand**，**Factor**，**Together**，**Apart**，**Solve**，**NSolve**，**FindRoot** 函数。

实验指导

一、多项式的运算

常用多项式运算函数见表 1-5-1。

表 1-5-1　Mathematica 常用的多项式运算函数

函　数	说　明
Expand[多项式]	把多项式展开
Expand[多项式,x]	按 x 的乘幂展开多项式
Factor[多项式]	对多项式进行因式分解
FactorTerm[多项式]	提取数字公因式
Collect[多项式,x]	以 x 的幂的形式重新排列多项式

例 1.5.1　一元多项式的各种运算。

In[]:=**p1=x^3-x**

Out[]=

$-x+x^3$

In[]:=**Factor[p1]**　　　　（＊对 p_1 进行因式分解＊）

Out[]=

$(-1+x)\ x\ (1+x)$

In[]:=**Expand[%]**　　　　（＊将上述输出结果展开＊）

Out[]=

$-x+x^3$

例 1.5.2　二元多项式的各种运算。

In[]:=**p2=(1+2x+y)^3**

Out[]=

$(1+2x+y)^3$

In[]:=**Expand[%]**

Out[]=

$1+6x+12x^2+8x^3+3y+12xy+12x^2y+3y^2+6xy^2+y^3$

In[]:=**Collect[p2,x]**

Out[]=

$1+8x^3+3y+3y^2+y^3+x^2(12+12y)+x(6+12y+6y^2)$

In[]:=**Collect[p2,y]**

Out[]=

$1+6x+12x^2+8x^3+(3+12x+12x^2)y+(3+6x)y^2+y^3$

二、有理式的运算

有理分式运算函数见表 1-5-2。

表 1-5-2　常用的有理分式运算函数

函　数	说　明
Apart[表达式]	将表达式分解为部分分式之和
Expand[表达式]	展开表达式的分子，逐项被分母除
ExpandAll[表达式]	展开表达式的分子、分母
Factor[表达式]	将表达式的分子分母因式分解，并约分
Together[表达式]	对有理式进行通分

例 1.5.3　有理分式的各种运算。

In[]:=**1/((x^2+1)*(x^2+x))**

Out[]=

$$\frac{1}{(1+x^2)\ (x+x^2)}$$

In[]:=**Factor[%]**

Out[]=

$$\frac{1}{x\ (1+x)\ (1+x^2)}$$

In[]:=**Apart[%]**

Out[]=

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2\ (1+x)}+\frac{-1-x}{2\ (1+x^2)}$$

In[]:=**r3=(2x+3)/(x^2+3x-10)**

Out[]=

$$\frac{3+2x}{-10+3x+x^2}$$

In[]:=**Apart[%]**

Out[]=

$$\frac{1}{-2+x}+\frac{1}{5+x}$$

三、三角函数的运算

三角函数运算函数见表 1-5-3。

表 1-5-3　常用的三角函数运算函数

函　数	说　　明
TrigExpand[表达式]	将三角函数表达式转化为和差的形式
TrigFactor[表达式]	将和差形式的三角函数转化为乘积的形式
TrigReduce[表达式]	用倍角的方法化简三角表达式
TrigToExp[表达式]	将三角函数表达式化为指数形式
ExpToTrig[表达式]	将指数形式化为三角函数表达式

注意：表 1-5-3 列出的函数不仅对普通的三角函数是适用的，对双曲函数也是适用的。

例 1.5.4 有关三角函数的各种运算。

In[]:=**TrigExpand[(1+Sin[x])/(Sin[x]*(1+Cos[x]))]**

Out[]=

$$\frac{1+\mathrm{Csc}[x]}{1+\mathrm{Cos}[x]}$$

In[]:=**TrigReduce [Sin[x]*Cos[x]]**

Out[]=

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[2x]$$

In[]:=**TrigToExp [Tan[x]]**

Out[]=

$$\frac{i\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)}{e^{-ix}+e^{ix}}$$

四、化简表达式

常见化简函数见表 1-5-4。

表 1-5-4　常用的表达式化简函数

函　数	说　明
Simplify[表达式]	化简表达式
FullSimplify[表达式]	完全化简表达式

例 1.5.5 化简表达式。

In[]:=**Simplify[Sin[x]^2+Cos[x]^2]**

Out[]=

1

In[]:=**FullSimplify[(2x+3)/(x^2+3x-10)]**

Out[]=

$$\frac{1}{-2+x}+\frac{1}{5+x}$$

五、方程（组）求解

求解方程（组）函数见表 1-5-5。

表 1-5-5 常用的求解方程（组）函数

函 数	说 明
Solve[方程(组),{变量}]	求方程（组）的精确解
NSolve[方程(组),{变量}]	求方程（组）的近似解
FindRoot[方程,{变量,初值}]	用 Newton 法求方程在初值附近的近似解
FindRoot[方程,{变量,{初值 1,初值 2}}]	用割线法求方程的一个近似解
FindRoot[方程组,{变量 1,初值 2},{变量 2,初值 2}]	用 Newton 法求方程组的一组近似解

例 1.5.6 求代数方程 $x^2+2x-7=0$ 的根。

In[]:=**Solve[x^2+2x-7==0,x]**

Out[]=

$\{\{x\to -1-2\sqrt{2}\},\{x\to -1+2\sqrt{2}\}\}$

In[]:=**N[%]**

Out[]=

{{x→ -3.82843}, {x→ 1.82843}}

例 1.5.7 求方程组 $\begin{cases} ax+y=0 \\ x+(1+a)y=0 \end{cases}$ 的解，其中 a 为常数。

In[]:=**Solve[{a*x+y==0,x+(1+a)*y==1},{x,y}]**

Out[]=

$$\left\{\left\{x\to -\frac{1}{-1+a+a^2},\ y\to \frac{a}{-1+a+a^2}\right\}\right\}$$

例 1.5.8 求代数方程 $x^5+x+1=0$ 的全部解。

In[]:=**NSolve[x^5+x+1==0,x]**

Out[]=

{{x→ -0.754878}, {x→ -0.5 - 0.866025 i}, {x→ -0.5 + 0.866025 i},
{x→ 0.877439 - 0.744862 i}, {x→ 0.877439 + 0.744862 i}}

例 1.5.9　求超越方程 $3\cos x - \ln x = 0$ 在 $x = 1, x = 10$ 附近的根。

```
In[]:=FindRoot[3Cos[x]==Log[x],{x,1}]
Out[]=
  {x→ 1.44726}
In[]:=FindRoot[3Cos[x]==Log[x],{x,10}]
Out[]=
  {x→ 13.1064}
```

实验内容

练习 1　将下列有理式化为简单真分式之和。

（1）$\dfrac{x^3}{x+1}$；　　（2）$\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$；

（3）$\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}$；　　（4）$\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$；

（5）$\dfrac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$。

练习 2　画出函数 $y = e^x \sin x - x\cos 2x$ 的图形，并求方程 $e^x \sin x - x\cos 2x = 0$ 最靠近零点的 5 个根。

练习 3 （1）求解关于 x 的方程：$ax^2+(3a+b)x-10(3a-b)=0$，并将结果化简。

（2）求出此方程当 $a=1, b=2$ 时的解。

（3）计算此方程的两根之和与两根之积。

练习 4　求下列方程的近似根：

（1）$x^3+3x-1=0$；

（2）$x\lg x = 1$；

（3）$x = a\sin x + b$。

练习 5　分解因式 $x^n-1, n=20,50,234,678, \cdots$。

实验 1-6　表的生成及其运算

实验目的

1. 理解表的概念。
2. 掌握构造表的方法。
3. 掌握 **Range, Table, NestList** 函数。
4. 会对表进行各种处理。

实验指导

一、表的概念

"表"（List）是 Mathematica 系统里一种重要的表示结构，它用于表示相互有关系的一组表达式。表示形式是用花括号括起来的若干表达式，表达式之间用逗号分隔开，可用于表示数学中的向量、矩阵、集合等。

例 1.6.1　各种表的例子。

（1）**{1,2,4,8,16,32}** (用表表示集合);

（2）**{ {1,0,0},{0,1,0},{0,0,1} }**（用表表示矩阵）;

（3）**{ Sin[x], Cos[x], Exp[x] }**（用表表示函数组）。

二、 表的生成

生成表的函数见表 1-6-1。

表 1-6-1　　常用的表的生成函数

函　数	说　明
Range[初值,终值,步长]	数值表的生成函数
Table[通项,{循环描述}]	通用表的生成函数
Array[函数,{循环描述}]	特殊表的生成函数
NestList[函数,初值,递推次数]	递推表的生成函数

三、循环描述的形式

构造通用表的循环描述的一般形式为：**{循环变量,循环初值,循环终值,步长}**

循环变量、循环初值、循环终值和步长可为整数、有理数和实数。当步长为 1 时可省略，当循环初值为 1 时也可省略。

例 1.6.2 **Range** 函数的使用方法。

In[]:=**Range[10]**

Out[]=

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[]:=**Range[5, 15]**

Out[]=

{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

In[]:=**Range[1, 5, .5]**

Out[]=

{1, 1.5, 2., 2.5, 3., 3.5, 4., 4.5, 5.}

例 1.6.3 **Table** 函数的使用方法。

In[]:=**Table[(-1)^n, {n,10}]**

Out[]=

{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1}

In[]:=**Table[1 –x^n, {n,1,15,2}]**

Out[]=

$\{1-x, 1-x^3, 1-x^5, 1-x^7, 1-x^9, 1-x^{11}, 1-x^{13}, 1-x^{15}\}$

In[]:=**Table[x^i+y^j,{i,1,2},{j,1,2}]**

Out[]=

$\{\{x+y, x+y^2\}, \{x^2+y, x^2+y^2\}\}$

In[]:=**Table[N[Sin[x*Degree]],{x,30,35}]**

Out[]=

{0.5, 0.515038, 0.529919, 0.544639, 0.559193, 0.573576}

In[]:=**t=Table[i+j-k,{i,1},{j,2},{k,3}]**

Out[]=

{{{1, 0, -1}, {2, 1, 0}}}

In[]:=**TableForm[t]**

Out[]=

```
1      2
0      1
-1     0
```

例 1.6.4 用 **NestList** 构造递推函数。

In[]:= **f[x_]:=1/(1+x);NestList[f,t,3]**

Out[]=

$$\left\{t, \frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+t}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+t}}}\right\}$$

In[]:=**g[x_]:=Sqrt[2+x];NestList[g,x,3]**

Out[]=

$$\left\{x, \sqrt{2+x}, \sqrt{2+\sqrt{2+x}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}\right\}$$

In[]:=N[NestList[g,0,10]]

Out[]=

{0., 1.41421, 1.84776, 1.96157, 1.99037, 1.99759, 1.9994, 1.99985, 1.99996, 1.99999, 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2.}

四、表的操作

常用的表操作函数见表 1-6-2。

表 1-6-2　　常用的表的操作函数

函　　数	说　　明
Take[表,{m,n}]	从给定表中选择由 m 到 n 的元素
Drop[表,{m,n}]	从给定表中去掉由 m 到 n 的元素
Length[表]	求出表的长度
Sort[表]	求出表的元素按标准顺序重排后得到的表
Reverse[表]	求出原表反序后的表
Union[表 1,表 2,…]	将表 1，表 2 …作为集合求并
Intersection[表 1,表 2,…]	将表 1，表 2 …作为集合求交
Complement[表 1,表 2,表 3,…]	求表 2，表 3 …相对于表 1 的补集

例 1.6.5　用表定义集合并进行各种运算。

In[]:=a=Range[10]

Out[]=

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[]:=b=Range[5,15]

Out[]=

{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

In[]:=Union[a,b]

Out[]=

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

In[]:=Intersection[a,b]

Out[]=

{5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[]:=Complement[b,a]

Out[]=

{11, 12, 13, 14, 15}

In[]:=Complement[a,b]

Out[]=

{1, 2, 3, 4}

实验内容

练习 1　构造下面的表：

（1）$\{1, 4, 9, 16, \cdots, 10000\}$；　　（2）$\{1, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}, \cdots, \frac{x^{200}}{200!}\}$。

练习 2　求出数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的前 $n=10, 100, 1000$ 项的值，画出散点图，分别从几何和数值上观察随着 n 的增大，数列 x_n 的变化趋势。

练习 3　构造函数 $f(x)=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{1}{n+x}}}$，取 $n=5,10,20$，画出函数的图形，并求函数值 $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$。

实验 1-7　一元微积分的基本运算

实验目的

1. 掌握利用 Mathmatica 进行一元函数微积分运算的基本方法。
2. 掌握 **Limit**，**D**，**Dt**，**Series**，**Integrate** 函数的使用方法。

实验指导

一、求极限

求极限函数见表 1-7-1。

表 1-7-1　常用的求极限函数

函　数	说　明
Limit[f[x],x->x0]	x 趋于 x_0 时函数的极限
Limit[f[x],x->x0,Direction->1]	x 趋于 x_0 时函数的左极限
Limit[f[x],x->x0,Direction->-1]	x 趋于 x_0 时函数的右极限
Limit[f[x],x->+Infinity]	$x\to+\infty$ 时函数的极限
Limit[f[x],x->-Infinity]	$x\to-\infty$ 时函数的极限
Limit[f[n],n->Infinity]	数列的极限

例 1.7.1　求函数的极限：

```
In[]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity]
Out[]=
    e
In[]:=Limit[1/(1-x)-3/(1-x^3),x-> 1]
Out[]=
    -1
In[]:=Limit[(Exp[x]-Exp[-x])/Sin[x],x-> 0]
Out[]=
    2
In[]:=Limit[1/Sin[x]^2-1/ x^2,x-> 0]
Out[]=
```

$$\frac{1}{3}$$

```
In[]:=Limit[Cos[x]^(Pi/2)-x,x-> Pi/2]
Out[]=
    1
```

二、求函数的导数和微分

微分运算函数见表 1-7-2。

表 1-7-2　常用的微分运算函数

函　数	说　明
D[f[x],x]	求 $f(x)$ 的一阶导数
D[f[x],{ x, n}]	求 $f(x)$ 的 n 阶导数
D[f[x,y[x]],x]	求 $f(x, y)$ 对 x 的导数(视 y 为 x 的函数)
Dt[f [x]]	求 $f(x)$ 的微分

例 1.7.2　验证求导公式。

```
In[]:=D[u[x]*v[x],x]
Out[]=
    v[x] u'[x] + u[x] v'[x]
In[]:=D[u[x]/v[x],x]
Out[]=
```

$$\frac{u'[x]}{v[x]}-\frac{u[x]\ v'[x]}{v[x]^2}$$

例 1.7.3　求函数的导数和微分。

```
In[]:=D[Sin[2x]/x,x]
Out[]=
```

$$\frac{2\,\text{Cos}[2x]}{x}-\frac{\text{Sin}[2x]}{x^2}$$

```
In[]:=D[Exp[x]*Cos[x],{x,4}]
Out[]=
    -4 e^x Cos[x]
In[]:=D[x^2*Sin[2x],{x,10}]
Out[]=
    -20971520 x Cos[2 x] - 99614720 Sin[2 x] + 1048576 x^2 Sin[2 x]
In[]:=Dt[ArcSin[Sqrt[1-x^2]]]
Out[]=
```

$$-\frac{x\,\text{Dt}[x]}{\sqrt{x^2}\ \sqrt{1-x^2}}$$

例 1.7.4　求隐函数的导数。

```
In[]:=dif= D[y[x]-1-x*Exp[y[x]],x]
```

Out[]=

$$-e^{y[x]}+y'[x]-e^{y[x]}\,x\,y'[x]$$

In[]:=**Solve[dif==0, y'[x]]**

Out[]=

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{e^{y[x]}}{-1+e^{y[x]}\,x}\right\}\right\}$$

例 1.7.5 求抽象函数的导数。

In[]:=**D[x*f[x^2],x]**

Out[]=

$$f[x^2]+2x^2 f'[x^2]$$

In[]:=**D[f[Sin[x]^2]+ f[Cos[x]^2],x]**

Out[]=

$$-2\,Cos[x]\,Sin[x]\,f'[Cos[x]^2]+2\,Cos[x]\,Sin[x]\,f'[Sin[x]^2]$$

三、函数的 Taylor 展开式

利用函数 **Series[f[x],{x,x0,n}]** 可以容易地求出任何可导函数 $f(x)$ 在 x_0 点的带有 Peano 型余项的 n 阶 Taylor 展开式，用 **Normal** 函数可以去掉展开式中的余项，得到 $f(x)$ 的 Taylor 多项式。

例 1.7.6 求 $y=\sin x$ 的 10 阶 Maclaurin 多项式。

In[]:=**Series[Sin[x],{x,0,10}]**

Out[]=

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}+O[x]^{11}$$

In[]:=**Normal[%]**

Out[]=

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}$$

例 1.7.7 求 $f(x)=e^x\sin x$ 的 5 阶 Maclaurin 多项式。

In[]:=**Normal[Series[Exp[x]*Sin[x],{x,0,5}]]**

Out[]=

$$x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}$$

四、函数的积分

积分运算函数见表 1-7-3。

表 1-7-3　常用的积分运算函数

函　数	说　明
Integrate[f(x),x]	计算不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$
Integrate[f(x),{ x, a, b}]	计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
NIntegrate[f(x),{ x, a, b}]	计算数值积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

例 1.7.8　求各类积分。

In[]:= **Integrate[1/(x^2-1),x]**

Out[]=

$$\frac{1}{2}\text{Log}[-1+x]-\frac{1}{2}\text{Log}[1+x]$$

In[]:=**Simplify[D[%,x]]**　　　　　（＊用微分验证运算结果＊）

Out[]=

$$\frac{1}{2(-1+x)}-\frac{1}{2(1+x)}$$

In[]:= **Integrate[1/x*Sqrt[x^2 - 1],{x,-2,-1}]**

Out[]=

$$-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$$

In[]:= **NIntegrate[Sin[x]/x,{x,1,2}]**

Out[]=

0.65933

例 1.7.9　利用 **Integrate** 函数计算广义积分。

In[]:= **Integrate[1/x^4,{x,1,Infinity}]**

Out[]=

$$\frac{1}{3}$$

In[]:=**Integrate[1/Sqrt[x],{x,1,Infinity}]**

Out[]=

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{\sqrt{x}}$ does not converge on {1, ∞}.

信息提示广义积分不收敛。

实验内容

练习 1　自由练习求一元函数导数和微分的运算。

练习 2　自由练习各种求一元函数积分的运算。

实验 1-8　三维图形的绘制

实验目的

1. 掌握利用 Mathematica 绘制二元函数图形的基本方法。
2. 掌握 **Plot3D**，**ParmetricPlot3D**，**ListPlot**，**ContourPlot** 函数。
3. 会利用 **Plot3D** 函数的可选项对图形进行修饰。

实验指导

一、基本作图函数 Plot3D

三维绘图最基本的函数是 **Plot3D**，其使用形式如下：

Plot3D[f(x,y),{x,x1,x2},{y,y1,y2},可选项]

例 1.8.1　画出函数 $z=\sin xy$ 的图形。

```
In[]:=Plot3D[ Sin[x y],{x,0,Pi},{y, 0,Pi}]
Out[]=
        - SurfaceGraphics -
```

输出图形如图 1-8-1 所示。

二、用可选项修饰图形

与 **Plot** 函数一样，**Plot3D** 也有许多可选项可以用来修饰三维图形的外观。其使用方法与 **Plot** 中的可选项类似。表 1-8-1 给出了 **Plot3D** 函数常用的可选项。

表 1-8-1　Plot3D 的常用可选项

可选项	默认值	说　明
PlotPoint	**15**	采样函数的点数
PlotRange	**Automatic**	图形的显示范围
AspectRatio	**1**	作图高、宽比例，可以说明为任意数值
Boxed	**True**	说明是否给图形加上一个立体框
BoxRatios	**1:1:0.4**	说明图形立体框在三个方向上的长度比
ViewPoint	**{1.3,-2.4,2}**	将三维图形投射到平面上时使用的观察点，可使用 Shift+Ctrl+V 组合键选择 **ViewPoint** 的值
Mesh	**True**	说明曲面上是否画网格，可以用 **False** 取消网格
HiddenSurface	**True**	说明曲面被挡住的部分是否隐掉
Shading	**True**	说明曲面上是否涂阴影

例 1.8.2 画出 $z=\sin xy$ 的图形，去掉网格和立体框。

```
In[]:=Plot3D[ Sin[x y],{x,0,Pi},{y, 0,Pi},Boxed->False,Axes->False,
            PlotPoints->50,Mesh->False]
Out[]=
      - SurfaceGraphics -
```

输出图形如图 1-8-2 所示。

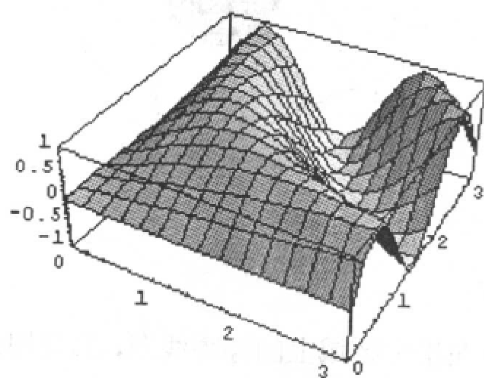


图 1-8-1

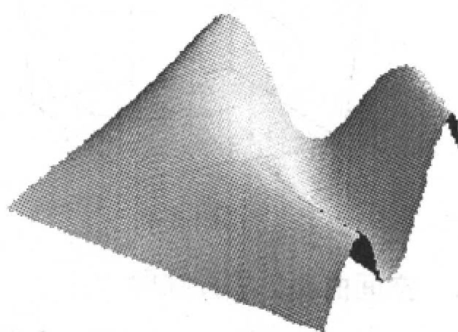


图 1-8-2

三、 三维参数作图

三维参数作图函数可以用来画空间曲面和曲线的图形。其使用形式如下：

ParametricPlot3D [{x(u,v),y(u,v),z(u,v)},{u,下限,上限},{v,下限,上限}]

例 1.8.3 画单位球面和圆柱螺线的图形。

```
In[]:=ParametricPlot3D
      [{Sin[u]*Cos[v],Sin[u]*Sin[v],
      Cos[u]},{u,0,Pi},{v,0,2Pi}]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

输出图形如图 1-8-3 所示。

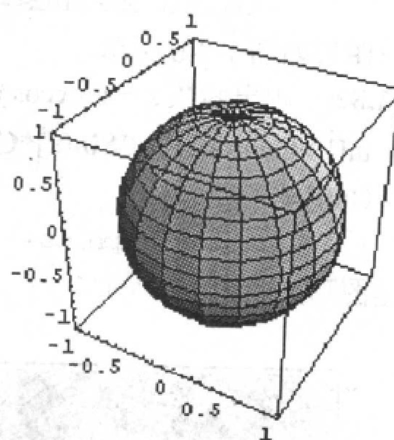


图 1-8-3

```
In[]:=ParametricPlot3D
      [{Sin[t],Cos[t],t/3 },{t,0,15 },
      AspectRatio->1]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

输出图形如图 1-8-4 所示。

例 1.8.4 画出旋转曲面 $z=x^2+y^2$ 的图形。

```
In[]:=ParametricPlot3D [{u*Sin[v],u*Cos[v],u^2 },{u,0,2},{v,0,2Pi}]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

输出图形如图 1-8-5 所示。

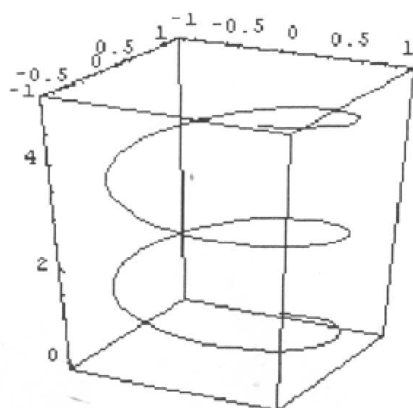


图 1-8-4

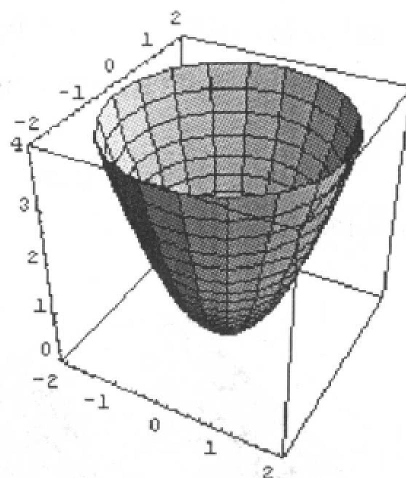


图 1-8-5

四、 空间曲面的等高线图

利用函数 **ContourPlot** 可以画出函数 $z = f(x, y)$ 在指定区域上的等高线图，其使用形式如下：

ContourPlot[f[x,y],{x,上限,下限},{y,上限,下限},可选项]

例 1.8.5 画出函数 $z = x^2 + y^2$ 的等高线图。

```
In[]:=ContourPlot[x^2+y^2,{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
Out[]=
        - ContourGraphics -
```

输出图形如图 1-8-6 所示。

例 1.8.6 画出函数 $z = \sin x \cos y$ 的等高线图。

```
In[]:=ContourPlot[Sin[x]*Cos[y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
Out[]=
        - ContourGraphics -
```

输出图形如图 1-8-7 所示。

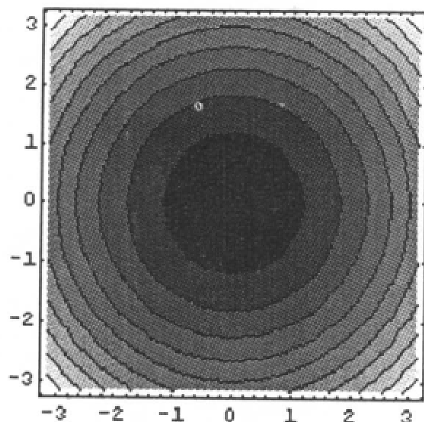


图 1-8-6

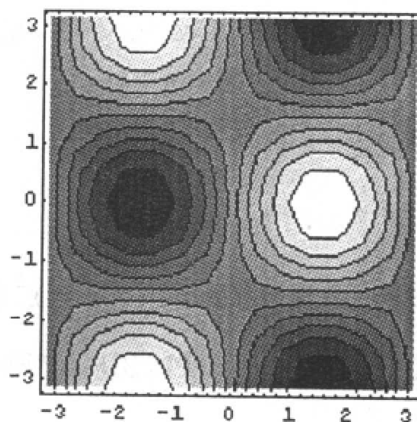


图 1-8-7

ContourPlot 也有许多可选项，见表 1-8-2。其使用方法与 **Plot** 中的可选项类似。

表 1-8-2　ContourPlot 常用的可选项

可选项	默认值	说　明
ColorFuntion	**Automatic**	使用什么样的明暗度，**Hue** 表示使用一系列的色彩
Contours	**10**	设定等高线的条数
PlotRange	**Automatic**	图中所包括的值域，可以设定**{Zmin,Zmax}**
ContourShading	**True**	是否使用明暗度
PlotPoints	**15**	在每个方向上的计算点数

例 1.8.7　画出函数 $z=x^2+y^2$ 的 5 条等高线图并去掉图中阴影。

```
In[]:=ContourPlot[x^2+y^2,{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},Contours->5,
                                    ContourShading->False]
Out[]=
      - ContourGraphics -
```

输出图形如图 1-8-8 所示。

利用 **ContourPlot** 函数可以画二维隐函数的图形。

例 1.8.8　画椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的图形。

```
In[]:=ContourPlot[x^2/9+y^2/4-1,{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi},Contours->1,
                        ContourShading->False,PlotRange->{0.,0.}]
Out[]=
      - ContourGraphics -
```

输出图形如图 1-8-9 所示。

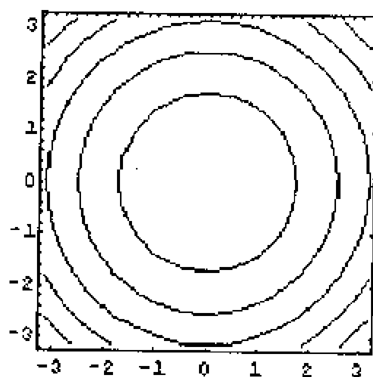


图 1-8-8

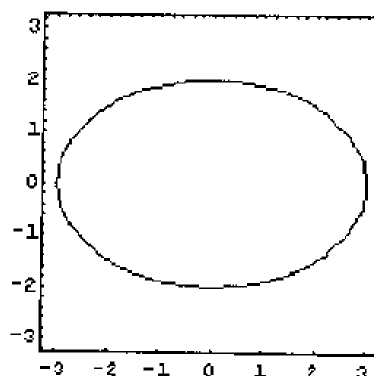


图 1-8-9

实验内容

练习 1　用 **Plot3D** 函数绘制下列函数的图形，并对图形的外观进行适当的修饰。

（1）圆锥面　$z = x^2 + y^2$；

（2）抛物柱面　$y^2 = 2x$；

（3）平面 $x - y = 0$；

（4）旋转抛物面 $y^2 + z^2 = 5x$。

练习 2　用 **ParametricPlot3D** 函数绘制下列函数的图形，并对图形的外观进行适当的修饰。

（1）椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$；

（2）单叶双曲面　$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$；

（3）双叶双曲面　$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$；

（4）双曲抛物面　$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$（$p, q$ 同号）；

（5）圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$；

（6）双曲柱面 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$。

练习 3　自由练习绘制各种隐函数的图形。

练习 4　自由练习绘制各种函数的等高线图。

实验 1-9　多元微积分的基本运算

实验目的

1. 会利用 Mathematica 进行多元函数微积分的基本运算。
2. 掌握 **D**，**Dt**，**Intergrate** 函数。

实验指导

一、求偏导数和全微分

多元微分运算函数见表 1-9-1。

表 1-9-1　常用的微分运算函数

函　数	说　明
D[f,x]	求偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$
D[f,{ x, n}]	求高偏阶导数 $\frac{\partial^n f}{\partial^n x}$
D[f,x1,x2,…,xn]	求高阶混合偏导数 $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$
Dt[f]	求全微分 $\mathrm{d}f(x)$
Dt[f,x]	求全导数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

例 1.9.1　求一阶偏导数。

In[]:=**D[Sqrt[2x+3y],x]**

Out[]=

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3y}}$$

In[]:=**D[(x-y)/(x+y),x]**

Out[]=

$$-\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}$$

In[]:=**D[(x-y)/(x+y),y]**

Out[]=

$$-\frac{x-y}{(x-y)^2}-\frac{1}{x+y}$$

例 1.9.2 求高阶偏导数。

```
In[]:=D[Sqrt[2x+3y],x,y]
Out[]=
```

$$-\frac{3}{2\,(2x+3y)^{3/2}}$$

```
In[]:=D[Log[x+2y^2+3z^3],x,y,z]
Out[]=
```

$$\frac{72\,y\,z^2}{(x+2y^2+3z^3)^3}$$

例 1.9.3 设 f 具有二阶连续的偏导数，$u=f(x,\frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

```
In[]:= D[f[x,x/y],x]
Out[]=
```

$$\frac{f^{(0,1)}\left[x,\frac{x}{y}\right]}{y}+f^{(1,0)}\left[x,\frac{x}{y}\right]$$

```
In[]:=D[f[x,x/y],x,y]
Out[]=
```

$$-\frac{f^{(0,1)}\left[x,\frac{x}{y}\right]}{y^2}-\frac{x\,f^{(0,2)}\left[x,\frac{x}{y}\right]}{y^3}-\frac{x\,f^{(1,1)}\left[x,\frac{x}{y}\right]}{y^2}$$

例 1.9.4 求全微分。

```
In[]:=Dt[y/Sqrt[x^2+y^2] ]
Out[]=
```

$$\frac{Dt[y]}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y\,(2\,x\,Dt[x]+2\,y\,Dt[y])}{2\,(x^2+y^2)^{3/2}}$$

二、 计算累次积分

利用 **Integrate[f,{x,a,b},{y,c,d},…]** 函数可以完成多重累次积分的计算。

例 1.9.5 计算累次积分 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)r^2dr$。

```
In[]:=Integrate[(4-r^2)*r^2,{t,0,2Pi},{r,0,2}]
Out[]=
```

$$\frac{128\,\pi}{15}$$

例 1.9.6 计算累次积分 $\int_0^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\mathrm{d}x$。

In[]:=**Integrate[x^2+y^2,{y,0,4},{x,y/2,Sqrt[y]}]**

Out[]=

$$\frac{216}{35}$$

例 1.9.7 计算累次积分 $\int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-1}^2 \mathrm{d}y \int_0^1 xyz^2 \mathrm{d}x$。

In[]:=**Integrate[x*y*z^2,{z,0,3},{y,-1,2},{x,0,1}]**

Out[]=

$$\frac{27}{4}$$

例 1.9.8 计算累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-2y} x\mathrm{d}z$。

In[]:=**Integrate[x,{x,0,1},{y,0,(1-x)/2},{z,0,1-x-2y}]**

Out[]=

$$\frac{1}{48}$$

实验内容

练习 1 自由练习用 Mathematica 进行多元函数微分学的各种运算。

练习 2 自由练习用 Mathematica 进行多元函数积分学的各种运算。

实验 1-10　无穷级数与微分方程

实验目的

1. 会利用 Mathematica 判断常数项级数的收敛性、求常数项级数的和函数。
2. 会利用 Mathematica 进行泰勒级数展开、进行幂级数的各种运算。
3. 会利用 Mathematica 求解微分方程。
4. 掌握 **Sum**，**Series**，**DSolve** 函数。

实验指导

一、求常数项级数的和

函数 **Sum[f[i],{i,0, Infinity }]**不仅可以用来判断级数的收敛性，同时可以用来求常数项级数和。

例 1.10.1　判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性并求和。

In[]:=**Sum[1/i^2,{i,1,Infinity}]**

Out[]=

$$\frac{\pi^2}{6}$$

例 1.10.2　判断数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的收敛性。

In[]:=**Sum[1/i,{i,1,Infinity}]**

Out[]=

```
Sum::div : Sum does not converge.
```

信息提示此级数不收敛。

二、幂级数展开

使用函数 **Series[f,{x,x0,n}]**可以进行幂级数展开。

例 1.10.3　用函数 Series 进行幂级数展开。

In[]:=**Series[Exp[x],{x,0,5}]**

Out[]=

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$$

In[]:=**Series[Exp[x]/x^2,{x,0,5}]**

Out[]=

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{120}+\frac{x^4}{720}+\frac{x^5}{5040}+O[x]^6$$

In[]:=Series[Exp[Sqrt[x]],{x,0,5}]

Out[]=

$$1+\sqrt{x}+\frac{x}{2}+\frac{x^{3/2}}{6}+\frac{x^2}{24}+\frac{x^{5/2}}{120}+\frac{x^3}{720}+O[x]^{7/2}$$

In[]:=Series[Exp[1/x],{x,Infinity,5}]

Out[]=

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{x}\right)^4+\frac{1}{120}\left(\frac{1}{x}\right)^5+O\left[\frac{1}{x}\right]^6$$

有些函数在一些特殊点是无法展开成为幂级数的，出现这种情况时 Mathematica 会给出警告信息。例如：

In[]:=Series[Exp[1/x],{x,0,5}]

Series::esss : Essential singularity encountered in $e^{\frac{1}{x}+O[x]^6}$

Out[]=

$$\text{Series}\left[e^{\frac{1}{x}},\{x,0,5\}\right]$$

三、幂级数的运算

Mathematica 允许对幂级数进行多种运算。

例 1.10.4 对幂级数进行多种运算。

In[]:=Series[Exp[x],{x,0,5}]

Out[]=

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$$

In[]:=%^2

Out[]=

$$1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^5}{15}+O[x]^6$$

In[]:=D[%,x]

Out[]=

$$2+4x+4x^2+\frac{8x^3}{3}+\frac{4x^4}{3}+O[x]^5$$

In[]:=Integrate[%,x]

Out[]=

$$2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^5}{15}+O[x]^6$$

四、求幂级数的和函数

函数 **Sum[f(x),{n,0,Infinity}]**可以用来求幂级数的和函数。

例 1.10.5 利用 **Sum** 函数求幂级数的和函数。

```
In[]:=Sum[x^n/n!,{n,0,Infinity}]
Out[]=
```

$$e^x$$

```
In[]:=Sum[(-1)^(n-1)*x^(2n-1)/(2n-1),{n,0,Infinity}]
Out[]=
```

$$-\frac{-1-x\,\text{ArcTan}[x]}{x}$$

```
In[]:=Sum[x^(2n-1)/(2n-1),{n,0,Infinity}]
Out[]=
```

$$\frac{-1+x\,\text{ArcTanh}[x]}{x}$$

五、解常微分方程

函数 **DSolve[微分方程,y[x],x]** 可以求解关于 $y(x)$ 的微分方程。

例 1.10.6 求一阶线性非齐次方程 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$ 的通解。

```
In[]:=DSolve[y ' [x]+y[x]*Cos[x]==Exp[-Sin[x]],y[x],x]
Out[]=
```

$$\{\{y[x]\to e^{-\text{Sin}[x]}\,x+e^{-\text{Sin}[x]}\,C[1]\}\}$$

例 1.10.7 求常系数两阶线性非齐次微分方程 $y''-2y'+5y=2e^x$ 的通解。

```
In[]:= Clear[y];
       DSolve[y ' ' [x]-2*y'[x]+5*y[x]==2*Exp[x],y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x]\to e^x C[2]\,\text{Cos}[2x]+\frac{1}{2}e^x\text{Cos}[2x]^2-e^x C[1]\,\text{Sin}[2x]+\frac{1}{2}e^x\text{Sin}[2x]^2\right\}\right\}$$

例 1.10.8 求欧拉方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 的通解。

```
In[]:=Clear[y];
      DSolve[x^3*y ' ' ' [x]+x^2*y ' ' [x]-4x*y ' [x]==3x^2,y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x]\to -\frac{x^2}{2}-\frac{C[1]}{x}+\frac{1}{12}x^3C[2]+C[3]\right\}\right\}$$

函数 **DSolve[{微分方程,初值条件},y[x],x]** 可以求解关于 $y(x)$ 的微分方程满足初值条件的特解。

例 1.10.9 求解微分方程 $y'(x)-y(x)\tan x=\sec x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解。

```
In[]:=Clear[y];
      DSolve[{y ' [x]-y[x]*Tan[x]==Sec[x],y[0]==0},y[x],x]
Out[]=
      {{y[x] → x Sec[x]}}
```

实验内容

练习 1　自由练习利用 Mathematica 进行有关无穷级数的各种运算。

练习 2　自由练习利用 Mathematica 求解各种类型的微分方程。

实验 1-11　向量、矩阵的运算与线性方程组求解

实验目的

1. 会利用 Mathematica 定义向量和矩阵。
2. 掌握利用 Mathematica 进行有关矩阵的各种运算。
3. 掌握利用 Mathematica 求解线性方程组的方法。
4. 掌握 **DiagonalMatrix**，**IdentityMatrix**，**Transpose**，**Inverse**，**MatrixPower**，**Eigenvalues**，**Eigenvectors**，**Minors**，**LinearSolve**，**NullSpace** 等函数。

实验指导

一、向量与矩阵的定义方法

Mathematica 中可以通过键盘直接输入矩阵或向量，将要输入的矩阵的元素依次写入{ }中，逐行写入，用逗号分开，外面再括以花括号{ }。输入时一般要将矩阵赋值于一个字母，以便后面调用。

例 1.11.1　定义矩阵。

In[]:=**t={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}**

Out[]=

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

In[]:=**MatrixForm[t]**

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mathematica 中还有一些函数可以用来定义向量和矩阵，见表 1-11-1。

表 1-11-1　定义向量与矩阵的常用函数

函　数	说　明
Array[a,n]	构造一个 n 维向量
Array[a,{m,n}]	构造一个 m 行 n 列矩阵
Table[f[i],{i,imin,imax,di}]	构造元素为 $f(i)$ 的向量
Table[f[i,j],{i,imin,imax,di},{j,jmin,jmax,dj}]	构造元素为 $f(i, j)$ 的矩阵
DiagonalMatrix[list]	以集合 list 中的元素为对角元素构造对角矩阵
IdentityMatrix[n]	构造 n 阶单位矩阵

例 1.11.2 使用 **IdentityMatrix**，**DiagonalMatrix** 构造特殊矩阵。

```
In[]:=Clear[t];
      t= IdentityMatrix[3];
      MatrixForm[t]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[]:=Clear[a,b,c];
      DiagonalMatrix[{a,b,c}]
Out[]=
      {{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}
In[]:= MatrixForm[%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

例 1.11.3 使用 **Array** 函数构造特殊矩阵。

```
In[]:=MatrixForm[Array[a,{3,2}]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a[1, 1] & a[1, 2] \\ a[2, 1] & a[2, 2] \\ a[3, 1] & a[3, 2] \end{pmatrix}$$

例 1.11.4 使用 **Table** 函数构造特殊矩阵。

```
In[]:=MatrixForm [Table[f[i,j],{i,3},{j,2}]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} f[1, 1] & f[1, 2] \\ f[2, 1] & f[2, 2] \\ f[3, 1] & f[3, 2] \end{pmatrix}$$

```
In[]:=MatrixForm[Table[i+j,{i,3},{j,2}]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

二、向量与矩阵的运算

向量与矩阵运算函数见表 1-11-2。

表 1-11-2　向量与矩阵运算的常用函数

函　数	说　明
c*A	常数 c 乘矩阵
u.v	向量内积
A.v	矩阵乘向量
A.B	矩阵相乘
Transpose[M]	求矩阵的转置
Inverse[M]	求矩阵的逆矩阵
Det[M]	求矩阵的行列式
Minors[M,k]	求矩阵所有的 k 阶子式
MatrixPower[M,n]	求矩阵的 n 次幂
Eigenvalues[M]	求数字矩阵的特征值
Eigenvectors[M]	求数字矩阵的特征向量

例 1.11.5　构造矩阵并进行各种运算。

In[]:=m={{2,0,1},{0,2,3},{1,1,0}}

Out[]=

```
{{2, 0, 1}, {0, 2, 3}, {1, 1, 0}}
```

In[]:=n={{1,1},{2,-1},{-1,1}

Out[]=

```
{{1, 1}, {2, -1}, {-1, 1}}
```

In[]:=m.n

Out[]=

```
{{1, 3}, {1, 1}, {3, 0}}
```

In[]:=c=Inverse[m]

Out[]=

$$\left\{\left\{\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\}, \left\{-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

In[]:=m.c

Out[]=

```
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}
```

In[]:=Eigenvalues[m]

Out[]=

$$\{2, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$$

In[]:=Eigenvectors[m]

Out[]=

$$\left\{\{-1, 1, 0\}, \left\{-\frac{1}{1+\sqrt{5}}, -\frac{3}{1+\sqrt{5}}, 1\right\}, \left\{\frac{1}{-1+\sqrt{5}}, \frac{3}{-1+\sqrt{5}}, 1\right\}\right\}$$

例 1.11.6 计算行列式$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -6 & 9 & 12 & 3 \\ 7 & -8 & -10 & 5 \end{vmatrix}$的值。

```
In[]:=m={{5,2,-6,-3},{-4,7,-2,4},{-6,9,12,3},{7,-8,-10,5}};
      Det[m]
Out[]=
      5472
```

三、求解线性方程组

解线性方程组函数见表 1-11-3。

表 1-11-3　求解线性方程组的常用函数

函　数	说　明
LinearSolve[M,u]	给出方程组 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{u}$ 的解向量
NullSpace[M]	给出方程组 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{0}$ 的一组基向量

例 1.11.7 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-3x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3+3x_4=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

的通解。

（1）先求对应齐次方程组的一个基础解系。

```
In[]:= u={{1,-1,-1,1},{1,-1,1,-3},{1,-1,-2,3}};
       x={{x1,x2,x3,x4}};
       v={0,1,-1/2};
       NullSpace[u]
Out[]=
       {{1, 0, 2, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

（2）再求非齐次方程组的一个特解。

```
In[]:=LinearSolve[u,v]
Out[]=
```

$$\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right\}$$

由非齐次线性方程组通解的结构即可写出上述方程组的通解。

实验内容

练习 1　用 Mathematica 生成下列矩阵。

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　（4）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$。

练习 2　生成如下 3×3 矩阵，求出其行列式并进行因式分解。

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$；　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$；　（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$。

练习 3　定义函数，它对参数 n 生成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{pmatrix}$$

对 $n=2,3,4,5$ 求该矩阵的行列式并求解方程。

练习 4　求矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵。

练习 5　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

求：

(1) $3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}$；

(2) $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$；

(3) 若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$；

(4) 若 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{Y}$。

练习 6　求下列线性方程组的基础解系。

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

练习 7　求下列线性方程组的特解。

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

实验 1-12　Mathematica 程序设计

实验目的

1. 了解 Mathematica 程序设计中的顺序结构、循环结构和分支结构。
2. 掌握用 Mathematica 进行程序设计的基本方法。

实验指导

一、Mathematica 中的关系运算与逻辑运算

数学计算和演算中经常涉及关系判断。最常见的是判断两个关系式的相等、不等，数值的大于、小于关系，等等。Mathematica 系统中关系表达式的一般形式为：

<表达式> <关系运算符> <表达式>

关系运算符号见表 1-12-1。

表 1-12-1　Mathematica 系统中的关系运算符号

符 号	说 明	例
==	等于	x==y+1
!=	不等于	x!=a
>	大于	a+b>1
<	小于	x-y<a-2
>=	大于等于	x^2>=1
<=	小于等于	x<=a+b

逻辑运算符号见表 1-12-2。

表 1-12-2　Mathematica 系统中的逻辑运算符号

符 号	说 明	例
!	否定	!（x>5）
&&	并且	x<2 && x>=-1
‖	或者	x>1 ‖ x<-1

逻辑表达式的一般形式为：

<关系表达式> <逻辑运算符> <关系表达式>

逻辑表达式的值有三个：真，假，非真非假。当判定条件成立时，逻辑表达式的值为 **True**（真）；当判定条件不成立时，逻辑表达式的值为 **False**（假）；当判定条件无法判定时，逻辑表达式的值为非真非假，即它仍为一个逻辑表达式。

例 1.12.1

```
In[]:=x=3;x>y
Out[]=
    x > y
In[]:=2>3
Out[]=
    False
In[]:=2<3
Out[]=
    True
```

二、过程与局部变量

在高级程序设计语言中提供了子程序功能，用来将某些语句串在一起以实现某种目的，Mathematica 程序中的过程也有类似的功能。

Mathematica 程序中的过程主要有两种：

（1）**表达式 1;表达式 2;…表达式 n}**，这一过程的输出值为表达式 n 的值。

（2）**Module[{x0,y0,…},表达式 1;表达式 2;…表达式 n]**，在 **Module** 过程中，花括号{ }中的语句用来说明局部变量，并可以赋初值，其输出值为表达式 n 的值。有时为了输出多个结果，可将 **Return[{表达式 1.1, 表达式 1.2,…}]**置于 **Module** 过程的最后一个语句。

三、顺序控制结构

Mathematica 中的顺序控制结构就是复合表达式，根据求解问题的需要把一个系统的表达式按顺序排列，在一个表达式后面写一个分号（;）接着写其他表达式，就构成了复合表达式。一个复合表达式的值就是它的最后一个表达式的值。

例 1.12.2 求函数 $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$ 的驻点。

```
In[]:=Clear[f];
      f[x_]:=2x^3-6x^2-18x+7;
      diff=D[f[x],x];
      Solve[diff==0,x]
Out[]=
    {{x→ -1}, {x→3}}
```

四、循环控制结构

许多计算问题都需要重复地做一些类似的工作，例如计算中的迭代、递归定义和计算等等，反映在程序里是通过对类似计算过程的反复执行完成的。Mathematica 提供了描述重复执行的循环控制结构，见表 1-12-3。

表 1-12-3　Mathematica 中的循环结构

函　数	说　明
Do[表达式,循环描述]	按照循环描述对表达式部分重复求值
While[条件,表达式]	只要条件为 True 时就重复执行表达式，一旦条件的值不是 True，立即结束整个结构
For[初始表达式,条件,步长表达式,表达式]	首先对初始表达式求值，然后进入循环体，依次求值条件、表达式、步长表达式。一旦对条件的求值不能得到 True，立即结束整个 For 结构

例 1.12.3　计算 $\sum_{k=1}^{100} k^2$ 的值。

计算方法共有以下 3 种：

（1）
```
In[]:=s=0;
      k=1;
      While[k<=100,s=s+k^2;k++];
      Print[s]
Out[]:=
      338350
```

（2）
```
In[]:=s=0;
      k=1;
      Do[s=s+k^2,{k,100}];
      Print[s]
Out[]:=
      338350
```

（3）
```
In[]:=s=0;
      For[k=1,k<=100,k++, s=s+k^2];
      Print[s]
Out[]=
      338350
```

例 1.12.4　设有数列 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2\cdots$，写出这个数列的第 5 项。

```
In[]:=x=Sqrt[2];
      For[k = 1, k <= 4, k++, x = Sqrt[x + 2]];
      Print[x]
Out[]:=
```

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

例 1.12.5 计算数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的第1,101,201,301,…,901项的值。

```
In[]:=n=1000;
    For[i=1,i<=n,i+=100,
        xi=N[(1+1/i)^i,10];
        Print["n= ",i, "        ", "xn= ",xi]]
Out[]=
      n=1     xn=2.
      n=101   xn=2.70495
      n=201   xn=2.71155
      n=301   xn=2.71378
      n=401   xn=2.7149
      n=501   xn=2.71557
      n=601   xn=2.71602
      n=701   xn=2.71635
      n=801   xn=2.71659
      n=901   xn=2.71677
```

例 1.12.6 画出函数 $y=\sin x$ 的 $n=1,3,5,7$ 阶 Maclaurian 级数的图形。

```
In[]:=Clear[x,f,n];
      f[x_]:=Sin[x];
      Do[a=Normal[Series[f[x],{x,0,n}]];
      Plot[{f[x],a},{x,-2Pi,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
      RGBColor[0,0,1]}], {n,1,7,2}]
Out[]=
      - Graphics -
```

输出图形如图 1-12-1 所示。

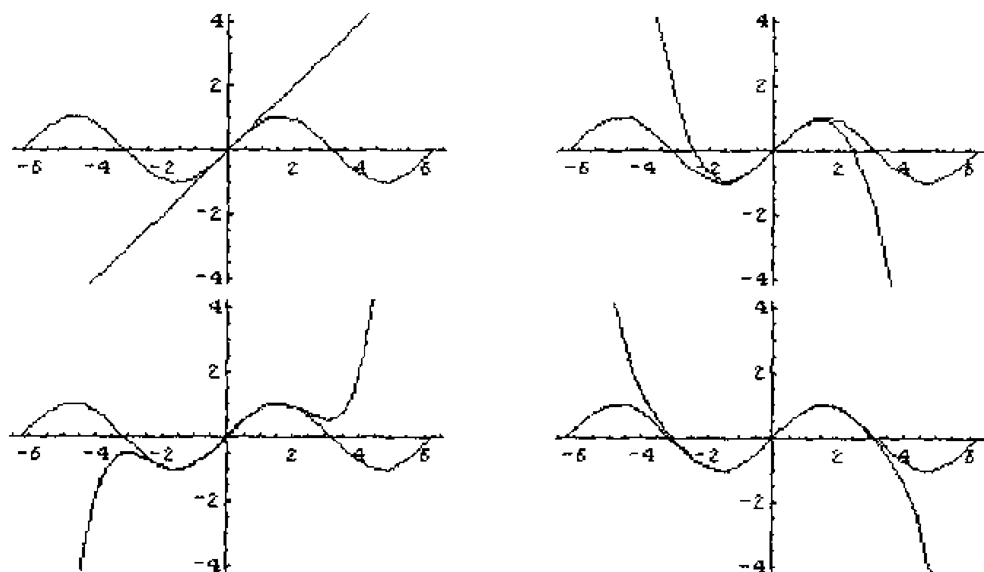


图 1-12-1

五、分支控制结构

在复杂的计算中常需要根据表达式的情况确定是否做某些处理，或在不满足条件时做不同的处理。Mathematica 提供了一些描述条件分支的结构，见表 1-12-4。

表 1-12-4　Mathematica 中的分支结构

函　　数	说　　明
If[条件,表达式]	当条件为 True 时将表达式的值作为整个语句的值；当条件为 False 时，给出空值 Null
If[条件,表达式 1,表达式 2,表达式 3]	当条件为 True 时将表达式 1 的值作为整个语句的值；当条件为 False 时，将表达式 2 的值作为整个语句的值；当条件为 unknown 时将表达式 3 的值作为整个语句的值
Which[条件 1,表达式 1,条件 2,表达式 2,…]	依次计算每个条件的值，将第 1 个为 True 的条件对应的表达式作为整个语句的值
Which[条件 1,表达式 1,…条件 n,表达式 n,True,表达式]	依次计算每个条件的值，将第 1 个为 True 的条件对应的表达式作为整个语句的值。用 True 作为 Which 的最后一个条件时，可用于处理其他情况

例 1.12.7　定义符号函数 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，画出函数的图形。

```
In[]:=sgn[x_]:=If[x>0,1,-1,0];Plot[sgn[x],{x,-3,3}]
Out[]=
        - Graphics -
```

输出图形如图 1-12-2 所示。

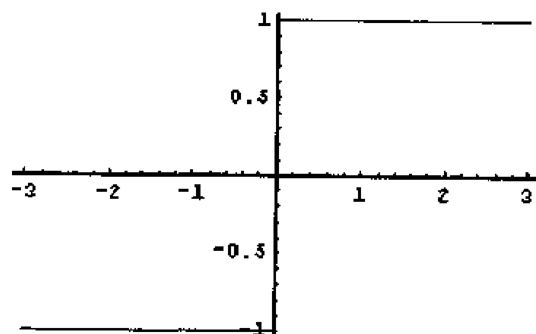


图 1-12-2

例 1.12.8 定义分段函数 $h(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ \sin x, & 0\le x<6\\ \dfrac{x}{2}, & 6\le x<10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 画出函数的图形，并求函数值 $h(-1)$，$h(1)$，$h(7)$，$h(11)$。

先画函数图形，如图 1-12-3 所示。

```
In[]:=h[x_]:=Which[x<0,-x,x>=0&&x<6,Sin[x],x>=6&&x<10,x/2,True,0];
      Plot[h[x],{x,-2,12}]
Out[]=
      - Graphics -
```

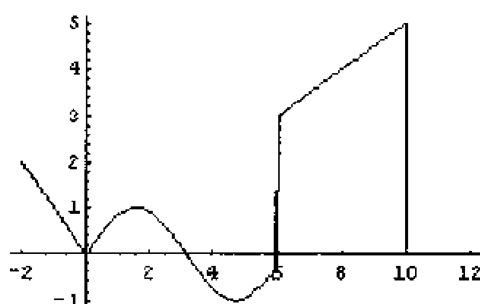


图 1-12-3

再求函数值。

```
In[]:={h[-1],h[1],h[7],h[11]}
Out[]=
```

$$\left\{1,\ \mathrm{Sin}[1],\ \frac{7}{2},\ 0\right\}$$

六、程序流程的控制

在正常情况下，系统对表达式的求值总是按照规定的顺序和方式进行。但是，在有些情况下，人们需要改变这种正常的顺序，以方便程序的设计，使计算流程更加自然，或者为了提高程序的执行效率，等等。为此，Mathematica 提供了一些特殊的程序流程控制结构，见表 1-12-5。

表 1-12-5　Mathematica 中常用的流程控制函数

函　数	说　明
Break	退出最近的一层循环
Continue	转入当前循环的下一步
Return[表达式]	退出函数中的所有过程及循环，并以表达式的值作为返回值
Label [标记]	定义一个标记
Goto[标记]	直接跳转到单杆过程中的标记处

Break 和 **Continue** 函数典型的使用具有如下结构：

```
While[…,
  … …;
    If[…, Continue[]];……;
    If[…, Break []];
  … …]
```

例 1.12.9 关于 **Break** 函数的一个例子。

```
In[]:= t=1;Do[t*=k; Print[t];
        If[t>19, Break[ ]],{k,10} ]
Out[]=
      1
      2
      6
      24
```

Label 和 **Goto** 函数在复合表达式里可以实现执行的控制转移，典型的使用具有如下结构：

```
Module[…,
      … …;
      Label[a];
      … …;
      If[…,Goto[a]];
      … …]
```

Return 函数可以实现从求值中退出的功能。**Return** 表达式有两种形式：

（1）**Return[]**，以 **Null** 作为当前函数的值。

（2）**Return[表达式]**，以表达的值作为当前函数的值。

例 1.12.10 关于 **Return** 函数的一个例子。

```
In[]:=f[y_, x_] := Module[{t}, t = D[y, x];
      If[t == 0, Return[" * * * "]]; t; Return[t]]
      f[Sin[x], x]
      f[5, x]
Out[]=
     Cos[x]
      * * *
```

实验内容

练习 1　使用 Mathematica 的循环控制结构计算100!和 $\sum_{k=1}^{100} k$。

练习 2　定义函数，使它产生连分式

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{n+x}}}}$$

练习 3　自由定义一个分段函数，并对函数进行微积分的各种运算。

练习 4　设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$由下式确定

$$\begin{cases} x_1 = 1, y_1 = 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

试用 Mathematica 编写程序求数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的极限值。

第二篇 高等数学基础实验

实验 2-1 函数与极限

实验目的

1. 掌握用 Mathematica 研究函数性质的基本方法。
2. 掌握用 Mathematica 求极限的基本方法。
3. 掌握用 Mathematica 研究函数连续性的基本方法。

实验的基本理论与方法

1. 数列极限的定义（略）。
2. 函数极限的定义（略）。
3. 无穷大量与无界函数（略）。
4. 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ 和极限 $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ 都存在并且相等。
5. 极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在当且仅当极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 和极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 都存在并且相等。
6. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的定义（略）。
7. 函数的间断点及其分类（略）。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Limit[f[x],x->x0]** ：求 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限。
2. **Limit[f[x],x->x0,Direction->1]** ：求 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的左极限。
3. **Limit[f[x],x->x0,Direction->-1]** ：求 x 趋于 x_0 时 $f(x)$ 的右极限。
4. **Limit[f[x],x->Infinity]** ：求 x 趋于 $+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限。
5. **Limit[f[x],x->-Infinity]** ：求 x 趋于 $-\infty$ 时 $f(x)$ 的极限。
6. **Limit[f[n],n->Infinity]** ：求数列 $f(n)$ 的极限。
7. **Plot[f[x],{x,a,b}]** ：画函数的图形。

实验指导

例 2.1.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$。

```
In[]:=Limit[(n^2 + n)^(1/3)/(n + 2), n -> Infinity]
Out[]=
      0
```

例 2.1.2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

```
In[]:=Limit[(Tan[x] - Sin[x])/x^3, x -> 0]
Out[]=
      1
      -
      2
```

例 2.1.3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。

若直接输入：

```
In[]:=Limit[E^(1/x),x->0]
Out[]=
      ∞
```

即极限为 ∞。事实上极限 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在。下面考察左、右极限。

```
In[]:=Limit[E^(1/x),x->0,Direction->-1]
Out[]=
      ∞
In[]:=Limit[E^(1/x),x->0,Direction->1]
Out[]=
      0
```

结果分别为 ∞，0，从而极限不存在。

此例题告诉我们在用 Mathematica 解题时往往要将计算机操作与数学理论结合使用才能得到正确的结果。

例 2.1.4 研究函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$。

首先画出 $y=\arctan x$ 的图形，如图 2-1-1 所示。

```
In[]:=Plot[{ArcTan[x],-Pi/2,Pi/2},{x,-100,100}, AxesLabel -> "ArcTan[x]"]
Out[]=
      - Graphics -
```

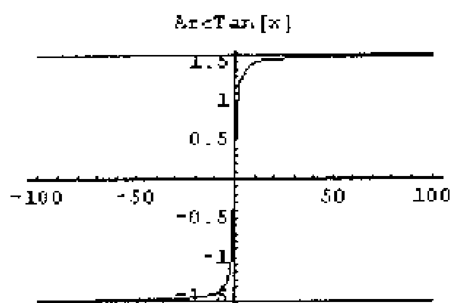


图 2-1-1

几何直观提示我们 $x\to-\infty$ 以及 $x\to+\infty$ 时函数的极限不同。下面我们分别来求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$。

```
In[]:=Limit[ArcTan[x], x -> -Infinity]
Out[]=
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
In[]:=Limit[ArcTan[x], x -> +Infinity]
Out[]=
```

$$\frac{\pi}{2}$$

由此可知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

例 2.1.5 求下列极限。

（1） $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$。

```
In[]:=Limit[x^Sin[x],x->0,Direction->-1]
Out[]=
    1
```

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+5}{2x-1})^{x+1}$。

```
In[]:= Limit[((2*x+5)/(2*x-1))^(x+1),x->Infinity]
Out[]=
```

$$e^3$$

例 2.1.6 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{a_1^x+a_2^x+a_3^x}{3})^{\frac{1}{x}}$，其中 a_1,a_2,a_3 为常数。

```
In[]:=Limit[((a1^x + a2^x + a3^x)/3)^(1/x), x -> 0]
Out[]=
```

$$a1^{1/3}a2^{1/3}a3^{1/3}$$

例 2.1.7 研究下列函数的连续性并画出函数的图形。

(1) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 1\\ 3-x, & x>1\end{cases}$。

首先画出函数的图形，如图 2-1-2 所示。

```
In[]:=f[x_]:=If[x <= 1, x - 1, 3 - x];      (* 定义分段函数 *)
      Plot[f[x], {x, -1, 3},AxesLabel -> "f(x)"]
Out[]=
      - Graphics -
```

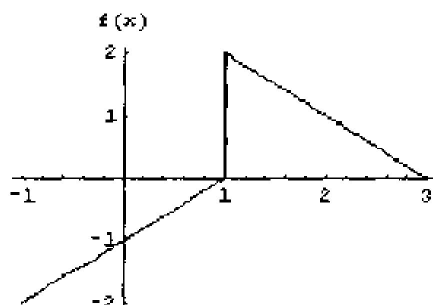


图 2-1-2

下面讨论函数在分界点 $x=1$ 处的连续性：

```
In[]:=Limit[x-1, x -> 1, Direction->1]
Out[]=
      0
In[]:=Limit[3-x, x -> 1, Direction->-1]
Out[]=
      2
```

由函数的图形以及函数间断点的定义可知 $x=1$ 是函数的跳跃间断点。

(2) $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$。

首先求出使函数分母为 0 的点。

```
In[]:=Clear[x, g];
      Solve[x^2 + x – 6==0]
Out[]=
      {{x→ -3}, {x→2}}
```

由此知 $x=-3, x=2$ 为函数的间断点。

再画出函数的图形，观察间断点的类型，如图 2-1-3 所示。

```
In[]:=g[x_] := (x^3 + 3x^2 - x - 3)/(x^2 + x - 6);
      Plot[g[x], {x, -4, 5},AxesLabel -> "g(x)"]
Out[]=
      - Graphics -
```

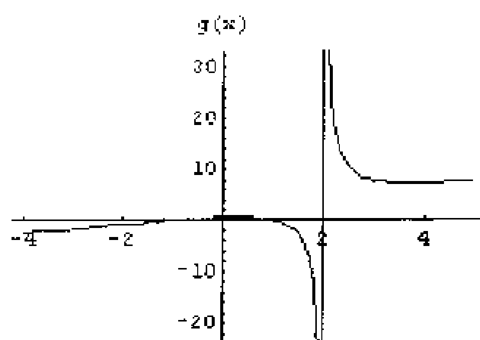


图 2-1-3

由图可知：$x=-3$ 是函数的可去间断点，$x=2$ 是函数的无穷间断点。下面我们从理论上证明上述结论。

```
In[]:=Limit[(x^3+3x^2-x-3)/(x^2+x-6), x ->-3]
Out[]=
```

$$-\frac{8}{5}$$

```
In[]:=Limit[(x^3+3x^2-x-3)/(x^2+x-6), x ->2]
Out[]=
```

$$\infty$$

实验内容

练习 1　通过几何直观说明函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间(0,1]上无界，但当 $x\to+0$ 时，这个函数不是无穷大。

练习 2　求下列极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$；

（5）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$。

练习 3　设 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$，（1）画出函数 $y=f(x)$ 的图形；（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$。

练习 4　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性。

练习 5　设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\\ \ln(1+x), & -1<x\le 0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点并说明间断点的类型，画出函数的图形验证你所得出的结论。

练习 6　自由练习求各种类型的极限。

练习 7　试找出几道 Mathematica 不能求解的极限题。

实验 2-2　导数与微分的计算

实验目的

掌握用 Mathematica 求函数的导数和微分的方法。

实验的基本理论与方法

1. 导数的定义：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

2. 函数的微分：若函数 $f(x)$ 可微分，则 $\mathrm{dy}=f'(x)\mathrm{d}x$。

3. 参数方程的导数：若 $\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导，并且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 二阶可导，且

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{dx}^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)}{\dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}t}}$$

4. 由方程所确定的隐函数的求导方法（略）。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **D[f,x]** ：求 $f'(x)$　（$f(x)$ 中其他符号均视为常数）。

2. **D[f,{x,n}]** ：求 $f^{(n)}(x)$。

3. **D[f{x,y[x]},x]** ：求 $f(x,y)$ 对 x 的导数，视 y 为 x 的函数。
4. **Dt[f[x]]** ：求函数 $f(x)$ 的微分。
5. **Solve**[方程,变量] ：求解方程或方程组。
6. **Simplify**[表达式] ：化简表达式。

实验指导

例 2.2.1 讨论函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 点的连续性与可导性。

先画出函数的图形，如图 2-2-1 所示。

```
In[]:=Plot[Abs[Sin[x]],{x,-Pi/2,Pi/2},AxesLabel->{"x","|Sin[x]|"}]
Out[]=
      - Graphics -
```

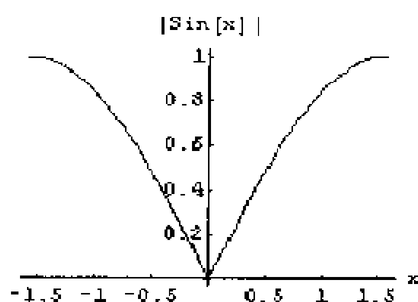


图 2-2-1

由几何直观可以看出函数在 $x=0$ 点是连续的，但没有切线，故不可导。下面我们从理论上证明此结论。

```
In[]:=Clear[f];
    f[x_]:= Abs[Sin[x]]
      Limit[f[x],x->0]                    (* 求函数在 x=0 点的极限值 *)
Out[]=
    0
```

极限值等于函数值，所以函数在 $x=0$ 点连续。

```
In[]:=Limit[Sin[x]/x,x->0,Direction->+1]      (* 求左导数 *)
Out[]=
    1
In[]:= Limit[-Sin[x]/x,x->0,Direction->-1]    (* 求右导数 *)
Out[]=
    -1
```

由此可知左导数不等于右导数，所以函数在 $x=0$ 点不可导。

例 2.2.2 设 $f(x)=\sin ax\cos bx$ 求 $f'(x)$ 及 $f'(\frac{1}{a+b})$，并求 $f''(x)$。

```
In[]:=f[x_]:=Sin[a*x]*Cos[b*x];
      D[f[x],x]
Out[]=
    a Cos[a x] Cos[b x] - b Sin[a x] Sin[b x]
In[]:=%/.x->1/(a+b)
```

（* 将 $x=\frac{1}{a+b}$ 代入导函数 *）

Out[]=

$$a\,\mathrm{Cos}\left[\frac{a}{a+b}\right]\mathrm{Cos}\left[\frac{b}{a+b}\right]-b\,\mathrm{Sin}\left[\frac{a}{a+b}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{b}{a+b}\right]$$

```
In[]:=D[f[x],{x,2}]
```

```
Out[]=
      -a^2 Cos[bx] Sin[ax] - b^2 Cos[bx] Sin[ax] - 2abCos[ax] Sin[bx]
```

还可以如下计算：

```
In[]:=f[x_] := Sin[a*x]*Cos[b*x];
      f'[x]
      f'[1/(a + b)]
      f''[x]
```

所得结果与上面完全一样。

例 2.2.3 求 $y=(1+x^2)\arctan x$ 的微分及一阶，二阶导数。

```
In[]:=f[x_]:=(1+x^2)*ArcTan[x];Dt[f[x]]
Out[]=
      Dt[x] + 2xArcTan[x] Dt[x]            (* Dt[x]表示微分 dx *)
In[]:=D[f[x],x]
Out[]=
      1 + 2xArcTan[x]
In[]:=D[f[x],{x,2}]
Out[]=
      2x
      ------ + 2 ArcTan[x]
      1 + x^2
```

例 2.2.4 求 $y=e^x\cos 2x$ 的 3 阶及 10 阶导数。

```
In[]:=D[E^x*Cos[2x],{x,3}]
Out[]=
      -11 e^x Cos[2x] + 2 e^x Sin[2x]
In[]:=D[E^x*Cos[2x],{x,10}]
Out[]=
      237 e^x Cos[2x] + 3116 e^x Sin[2x]
```

例 2.2.5 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=y-\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

求一阶导数：

```
In[]:=x[t_]:=Log[1+t^2];
      y[t_]:=t-ArcTan[t];
      dy[t_]:=Simplify[D[y[t],t]/D[x[t],t]];
      dy[t]
Out[]=
      t
      -
      2
```

求二阶导数：

```
In[]:=dy2[t_]:=Simplify[D[dy[t],t]/D[x[t],t]]
      dy2[t]
Out[]=
```

$$\frac{1+t^2}{4t}$$

例 2.2.6 设 $xy-e^y=0$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$。

求一阶导数：

```
In[]:=D[x*y[x]-E^y[x]==0,x];
      t=Solve[%,y'[x]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y'[x]\to\frac{y[x]}{e^{y[x]}-x}\right\}\right\}$$

求二阶导数：

```
In[]:=D[x*y[x]-E^y[x]==0,{x,2}];
      Solve[%,y''[x]]/.t[[1,1]];   Simplify[%]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y''[x]\to-\frac{y[x]\,(-2\,e^{y[x]}+2\,x+e^{y[x]}\,y[x])}{(e^{y[x]}-x)^3}\right\}\right\}$$

例 2.2.7 设 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x>0\\ \sin x, & x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$。

画出函数的图形，如图 2-2-2 所示。

```
In[]:=f[x_]:=If[x>0,E^x-1,Sin[x]];
      Plot[f[x],{x,-3,3},AxesLabel->{"x","f(x)"}]
Out[]=
      - Graphics -
```

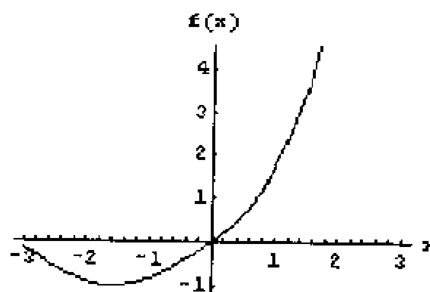


图 2-2-2

由图形可以看出函数在分界点 $x=0$ 处是连续的。下面我们求函数的导数。先求 $x>0$ 时函数的导数：

```
In[]:=D[Exp[x]-1,x]
Out[]=
```

e^x

再求 $x<0$ 时函数的导数：

```
In[]:=D[Sin[x],x]
Out[]=
      Cos[x]
```

最后求函数在 $x=0$ 点的导数：

```
In[]:=Limit[((Exp[x]-1)-f[0])/x,x->0,Direction->-1]     （*求右导数*）
Out[]=
      1
In[]:=Limit[(Sin[x]-f[0])/x,x->0,Direction->+1]     （*求左导数*）
Out[]=
      1
```

故函数的导数为

$$f'(x)=\begin{cases} e^x, & x>0 \\ \cos x, & x\le 0 \end{cases}$$

Mathematica 还可以用来直接求幂指函数的导数。

例 2.2.8 求幂指函数 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数。

```
In[]:=D[x^Sin[x],x]
Out[]=
```

$$x^{\text{Sin}[x]}\left(\text{Cos}[x]\ \text{Log}[x]+\frac{\text{Sin}[x]}{x}\right)$$

例 2.2.9 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线方程，并画出图形。

由导数的几何意义知，所求切线的斜率为 $k=y'|_{x=2}$ 。

```
In[]:=D[x^2/16+y[x]^2/9-1==0,x];
      t=Solve[%,y'[x]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{9x}{16y[x]}\right\}\right\}$$

```
In[]:=t/.{x->2,y[x]->3*Sqrt[3]/2}
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y'[2]\to-\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}\right\}$$

求切线方程：

```
In[]:=y - 3 Sqrt[3]/2 == -Sqrt[3]/4 (x - 2);Simplify[%]
Out[]=
```

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{4}+y==2\sqrt{3}$$

所求切线方程为 $\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0$。

下面画出椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 及其在点 $(2,\frac{3}{2}\sqrt{3})$ 处的切线图形，如图 2-2-3 所示。

```
In[]:=f=ParametricPlot[{4Cos[t], 3Sin[t]},{t,0,2Pi}];
    f1=Plot[3Sqrt[3]/2-Sqrt[3]/4(x-2),{x,-1,4},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
    Show[f,f1]
Out[]=
    - Graphics -
```

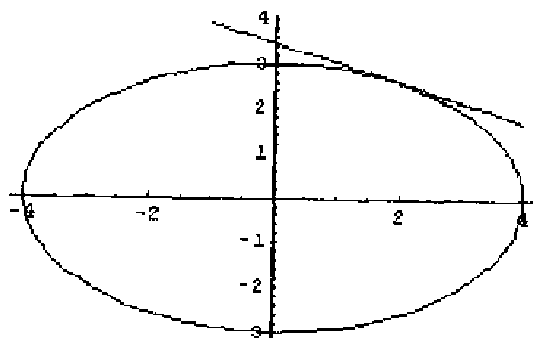


图 2-2-3

实验内容

练习 1　求下列函数的导数或微分。

（1）$y=\ln[\sin\sqrt{x^2+1}]$，求 $y'(x), y'(0)$；

（2）$y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{x}}$，求 $\mathrm{d}y, y''(x)$；

（3）设 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（4）设 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+t} \\ y=(\dfrac{t}{t+1})^2 \end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（5）设 $y=\sqrt[m]{1+x}$，求 $y^{(5)}(x)$；

（6）设 $y=\sqrt[3]{x}$，求 $y'(x)$。

练习 2　求曲线 $\begin{cases} x=2\mathrm{e}^t \\ y=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ 相应于 $t=0$ 处的切线及法线方程，并画出图形观察所求结果是否正确。

练习 3　讨论函数 $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

练习 4　讨论函数 $g(x)=\begin{cases} -1-2x, & x<-1 \\ x^2, & -1\leq x\leq 1 \\ x, & x>1 \end{cases}$ 的可导性，给出 $g'(x)$ 的表达式并画出 $g'(x)$ 的图形。

练习 5　令 $g(x)=\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$，对 $h=1,0.5,0.2,0.1,0.01$ 利用 **Plot** 函数给出 $g(x)$ 的图形，然后"猜出" $y=\sin x$ 的导数（将 5 个图形放在一张图上进行比较）。

实验 2-3　中值定理及其应用

实验目的

1. 用 Mathematica 验证中值定理的正确性。
2. 用 Mathematica 对函数进行 Taylor 展开。
3. 用函数的 Taylor 展开式作近似计算。

实验的基本理论与方法

1. Rolle 中值定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。

2. Lagrange 中值定理：如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使等式 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立。

3. Cauchy 中值定理：如果 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使等式 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 成立。

4. Taylor 中值定理：如果 $f(x)$ 在含 x_0 的某个区间 $[a,b]$ 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则对任一 $x\in[a,b]$，$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$，

其中，$R_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$（Lagrange 型余项），或 $R_n(x)=o(x-x_0)^{n+1}$（Peano 型余项）。

5. 常用函数的 Maclaurin 展开式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (0<\theta<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}]}{(2m+1)!}x^{2m+1},\quad (0<\theta<1)$$

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Series[f[x],{x,x0,n}]**：对 $f(x)$ 在 x_0 处作 n 阶 Taylor 展开。
2. **Normal**：去掉泰勒展开式中的余项。
3. **FindRoot**：求方程（组）的数值解。

4. D[f,x]：求函数 $f(x)$ 的导数。

5. Plot[f[x],{x,a,b}]：画出一元函数 $f(x)$ 的图形。

实验指导

例 2.3.1 验证 Lagrange 中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[a,b]$ 上的正确性。

显然 $f(x)$ 在任意点处可导，在任意区间 $[a,b]$ 上满足 Lagrange 中值定理条件,下面求出满足定理结论中的 ξ。

```
In[]:=f[x_] := 4x^3 - 5x^2 + x - 2;
      a = 0; b = 2;     (* 给a,b任意取值 *)
      FindRoot[f'[x] == (f[b] - f[a])/(b - a), {x, {0, 2}}] // N
Out[]=
      {x→ 1.2374}
```

即 a,b 任意取值，都存在 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

例 2.3.2 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 上验证 Cauchy 中值定理的正确性。

显然 $f(x),F(x)$ 满足 Cauchy 中值定理的条件，我们先来求满足定理结论中的 ξ。

```
In[]:=f[x_]:=Sin[x];
      F[x_]:=x+Cos[x];
      FindRoot[f'[x]/F'[x]==(f[Pi/3]-f[0])/(F[Pi/3]-F[0]),{x,{0,Pi/3}}]//N
Out[]=
      {x→ 0.443777}
```

下面再来验证 ξ 确实满足 Cauchy 中值定理的结论。

```
In[]:=(f[Pi/3]-f[0])/(F[Pi/3]-F[0])//N
Out[]=
      1.58266
In[]:=f'[x]/F'[x]/.x->0.443777
Out[]=
      1.58266
```

例 2.3.3 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，说明 $f'(x)=0$ 有几个实根，指出它们所在的区间，并求出所有根。

事实上，由 Role 中值定理我们可以判定出 $f'(x)=0$ 有三个实根，分别在区间 (1,2)，(2,3)，(3,4) 内。下面我们分别画出 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的图形，通过几何直观来验证此结论。

先画 $f(x)$ 的图形，如图 2-3-1 所示。

```
In[]:=Clear[f];
```

```
f[x_]:=(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4);
Plot[f[x],{x,0,5}]
```

Out[]=

- Graphics -

再画 $f'(x)$ 的图形，如图 2-3-2 所示。

```
In[]:=Plot[f'[x],{x,0,5}]
```

Out[]=

- Graphics -

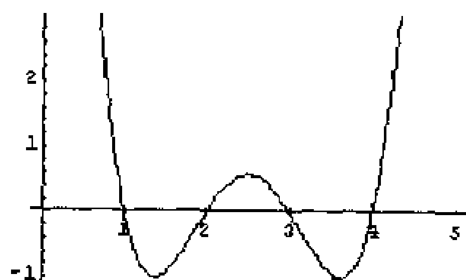


图 2-3-1

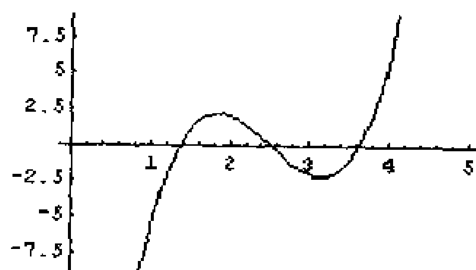


图 2-3-2

由图形可见，$f'(x)=0$ 在 $[1,2],[2,3],[3,4]$ 区间各有一个根。下面我们求出方程所有的根：

```
In[]:=Clear[x, f];
      f[x_] := (x - 1)*(x - 2)*(x - 3)*(x - 4);
      Solve[f'[x] == 0, x] // N
```

Out[]=

{{x→ 2.5}, {x→ 1.38197}, {x→ 3.61803}}

例 2.3.4 将下列函数进行 Taylor 展开，并显示 Taylor 多项式。

（1）$f(x)=x^2\ln x, x_0=1, n=4$。

```
In[]:=Series[x^2*Log[x],{x,1,4}]
```

Out[]=

$$(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{12}(x-1)^4+O[x-1]^5$$

```
In[]:=Normal[%]
```

Out[]=

$$-1+\frac{3}{2}(-1+x)^2+\frac{1}{3}(-1+x)^3-\frac{1}{12}(-1+x)^4+x$$

（2）$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}, x_0=0, n=8$。

```
In[]:=Series[E^(-x^2/2),{x,0,8}]
      Normal[%]
```

Out[]=

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}+O[x]^9$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}$$

例 2.3.5 按 $(x-1)$ 的乘幂展开多项式 $p(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$。

```
In[]:=f[x_]:=x^4-5x^3+x^2-3x+4;
      Normal[Series[f[x],{x,1,5}]]
Out[]=
      -2 - 12 (-1 + x) - 8 (-1 + x)^2 - (-1 + x)^3 + (-1 + x)^4
```

例 2.3.6 利用 e^x 的 Taylor 公式求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于10^{-4}。

```
In[]:=Clear[f,sn,rn,j,m];
      i=1;rn=1;j=1;m=4;
      While[rn>10^(-m),j=j*(i+1);
      rn=N[E^(1/2)/(2^(i+1)*j),6];
      sn=N[Normal[Series[E^x,{x,0,i}]]/.x->1/2,6];i++];
      Print["i=",i,"   rn= ",rn,"   sn=",sn]
Out[]=
      i=6  rn= 0.0000357795  sn=1.6487
```

于是得出：用 e^x 的 6 次 Taylor 多项式近似计算 $\sqrt{e}$，近似值为 1.6487，误差不超过 0.0000357795。

例 2.3.7 应用 3 阶 Taylor 公式求 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值，并估计误差。

取 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=27$，然后用 $f(x)$ 在 $x=27$ 点处的 3 阶 Taylor 公式计算 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值。

```
In[]:=f[x_]:=x^(1/3);s=N[Normal[Series[f[x],{x,27,3}]]/.x->30,6]
Out[]=
      3.10725
```

下面估计误差。

```
In[]:=D[f[x],{x,4}]
Out[]=
```

$$-\frac{80}{81\,x^{11/3}}$$

```
In[]:=r=-D[f[x],{x,4}]/4!*3^4/.x->27//N
Out[]=
      0.0000188168
```

得到误差不超过 0.0000188168。

实验内容

练习 1　写出函数 $f(x)=\tan x$ 的 3 阶 Maclaurin 公式。

练习 2　当 $x_0=4$ 时，求函数 $y=\sqrt{x}$ 的 6 阶 Taylor 公式及 Taylor 多项式。

练习 3　应用 6 阶 Taylor 公式求 $\sin 18^{\circ}$ 的近似值，并估计误差。

练习 4　应用 Maclaurin 公式，按 x 的乘幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$。

实验 2-4　一元函数微分学的应用

实验目的

掌握用 Mathematica 求解一元函数微分学应用问题的基本方法。

实验的基本理论与方法

1. 函数极值的定义（略）。

2. 函数极值的必要条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则必有 $f'(x_0)=0$ ，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点。

3. 函数极值的第一充分条件（略）。

4. 函数极值的第二充分条件（略）。

5. 函数单调性的判定：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x_0)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x_0)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

6. 曲线凹凸区间的划分，拐点的求法（略）。

7. 函数最大值与最小值的求法：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，求出 $f'(x_0)=0$ 的所有驻点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，比较 $x_1,x_2,\cdots,x_n,a,b$ 处的函数值，最大的是最大值，最小的是最小值。

8. 牛顿迭代法：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)f(b)<0$ 且 $f'(x)$，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上保持定号，取 $x_0\in[a,b]$ 使 $f'(x)$，$f''(x)$ 同号，由下面迭代公式可求近似根。

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Solve[f[x]==0,x]**：求方程 $f(x)=0$ 的解。

2. **N[a,n]**：求 a 的近似值，保留 n 位有效数字。

3. **FindRoot[f[x]==0,{x,x0}]**：求方程 $f(x)=0$ 在 x_0 附近的根。

4. **FindMinimum[f[x],{x,x0}]**：求函数 $f(x)$ 在 x_0 附近的极小值。

实验指导

例 2.4.1　通过几何与理论分析相结合的方法讨论方程 $\ln x=ax$ $(a>0)$ 有几个实根。

先求出函数的驻点：

```
In[]:=g[x_]:=Log[x]-a*x
      Solve[g'[x]==0,x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{a}\right\}\right\}$$

下面判断驻点是否为极值点。

```
In[]:=g'' [1/a]
Out[]=
```

$$-a^2$$

因为 $g''(\frac{1}{a})<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最大值。下面求函数的最大值。

```
In[]:=g[1/a]
Out[]=
```

$$-1+\mathrm{Log}\left[\frac{1}{a}\right]$$

确定最大值为零时 a 的值：

```
In[]:=Solve[g[1/a]==0,a]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{a\to\frac{1}{e}\right\}\right\}$$

下面通过几何直观观察当 $a=\frac{1}{e}$，$a>\frac{1}{e}$，$0<a<\frac{1}{e}$ 时，曲线 $y=\ln x-ax$ 与 x 轴交点的个数，即可得出方程 $\ln x=ax(a>0)$ 根的个数。

分别取定 a 的一些值，画出 $y=\ln x-ax$ 的图形，如图 2-4-1 所示。

```
In[]:=For[k = 2, k <=4.5, k = k + 0.5;

      Print["1/e=", N[1/E, 3]],

      a = N[Log[3, k]/E , 3];          （* 取a=1/e log3 k *）

      Plot[Log[x] - a x, {x, 0, 15}, PlotRange -> {-5, 5},
      AspectRatio -> Automatic,   PlotStyle -> { RGBColor[1, 0, 0]},
      AxesLabel -> " =a"a]]
Out[]=
      1/e=0.367879
```

由图形可以得出结论：当 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程有一个实根；当 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程没有实根；当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，方程有两个实根。

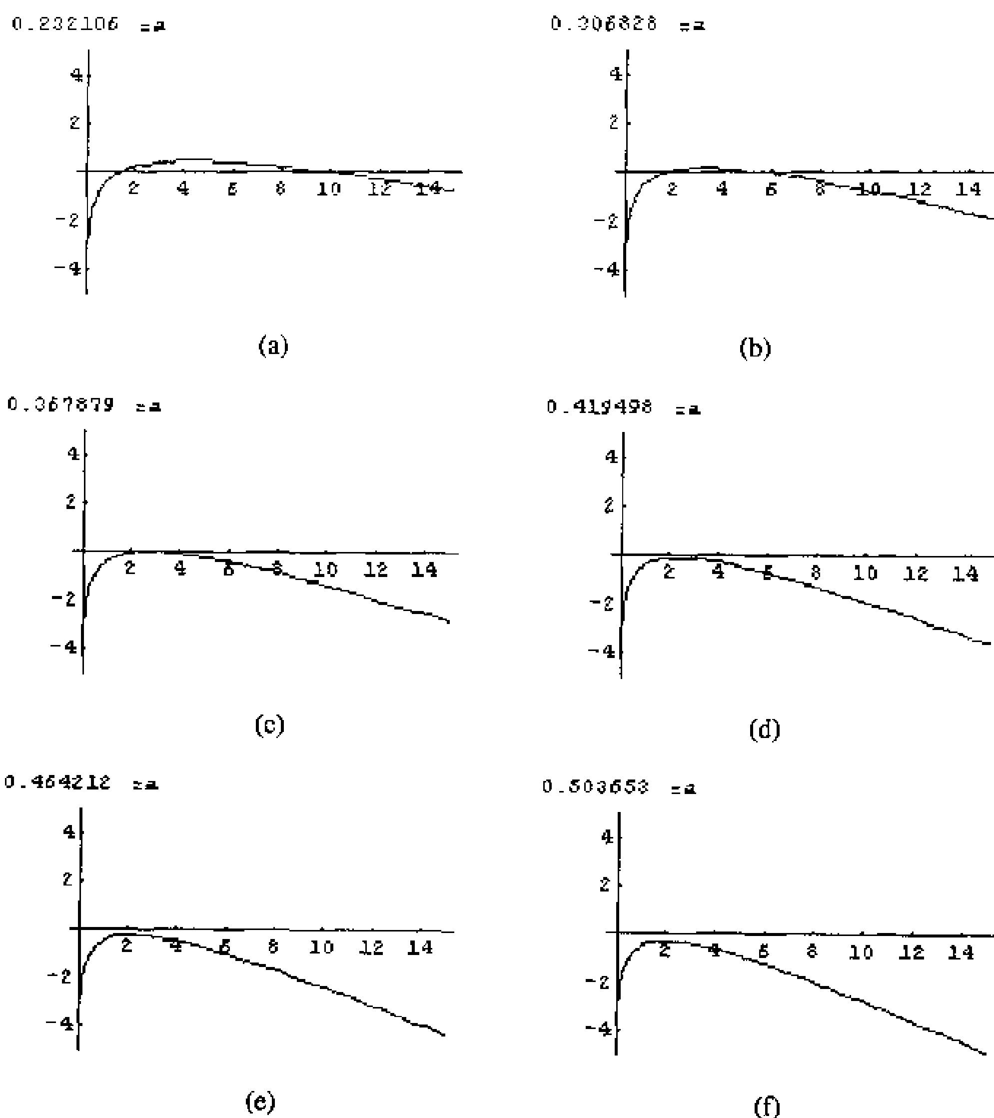


图 2-4-1

例 2.4.2 通过几何与分析相结合的方法，讨论 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 的单调性、凹凸性、极值与拐点。

先求出函数的驻点：

```
In[]:=f[x_]:=x^3-x^2-x+1;
      Solve[f'[x]==0,x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{x\to -\frac{1}{3}\right\},\ \{x\to 1\}\right\}$$

再画出 $f(x)$ 在驻点附近的图形，如图 2-4-2 所示。

```
In[]:=a= Plot[f[x],{x,-2,2},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}]
      b = Graphics[{Dashing[{0.03, 0.02}],
              Line[{{-1/3, 2}, {-1/3, 0}, {1, 0}, {1, 2}}]}];
      Show[a, b]
```

Out[]=

- Graphics -

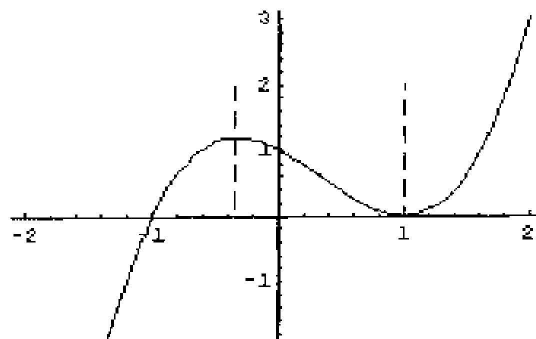


图 2-4-2

由图形知函数在 $x=-\frac{1}{3}$ 处取得极大值，在 $x=1$ 处取得极小值。

求出函数的极大值和极小值：

In[]:=f[-1/3]

Out[]=

1.18519（极大值）

In[4]:=f[1]

Out[]=

0.（极小值）

由图可见在 $(-\infty,-\frac{1}{3}],[1,+\infty)$ 上函数单调增加，在 $[-\frac{1}{3},1]$ 上函数单调减少。下面讨论曲线的

四、凸区间及拐点。

求二阶导数等于零的点：

In[]:=Solve[f''[x]==0,x]

Out[]=

$\{\{x\to\frac{1}{3}\}\}$

再画出 $f(x)$ 的图形，如图 2-4-3 所示。

```
In[]:=c = Graphics[{Dashing[{0.03, 0.02}], Line[{{1/3, 2}, {1/3, 0}}]}];
      Show[a, c]
```

Out[]=

- Graphics -

由 $f(x)$ 的图形知：曲线在区间 $(-\infty,\frac{1}{3}]$ 上是凸的，在区间 $[\frac{1}{3},+\infty)$ 上是凹的。

最后求曲线的拐点：

In[]:=N[{x,f[x]}/.x->1/3]

Out[]=

{0.333333, 0.592593}

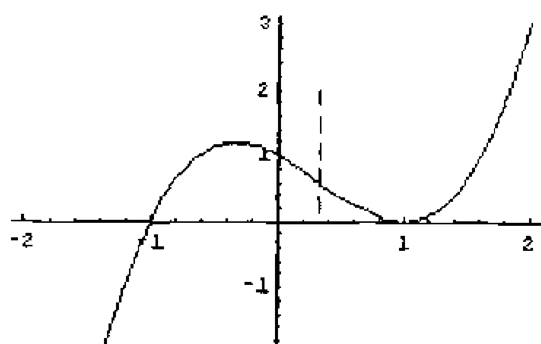


图 2-4-3

例 2.4.3 求函数 $f(x)=(x^5-3x^2+2)e^x+x$ 的极值。

先画出 $f(x)$ 的图形（如图 2-4-4 所示）。

```
In[]:=f[x_]:=(x^5-3x^2+2)*E^x+x; Plot[f[x],{x,-1,2}]
Out[]=
      - Graphics -
```

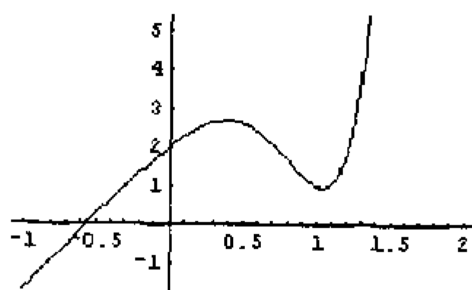


图 2-4-4

由图可见函数在 $x=0.5$ 附近有极大值，在 $x=1$ 附近有极小值。

```
In[]:=-FindMinimum[-f[x],{x,0.5}]
      FindMinimum[f[x],{x,1}]
Out[]=
      {2.68334, {-(x → 0.390707)}}      (* 极大值 2.68334 *)
      {0.959984, {x→ 1.04411}}          (* 极小值 0.959984 *)
```

注意　此题用 **Solve** 函数不能求出驻点。

例 2.4.4　求 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值。

画出 $f(x)$ 的图形，如图 2-4-5 所示。

```
In[]:=f[x_]:=2x^3+3x^2-12x+14;
      Plot[f[x],{x,-3,4}]
Out[]=
```

- Graphics -

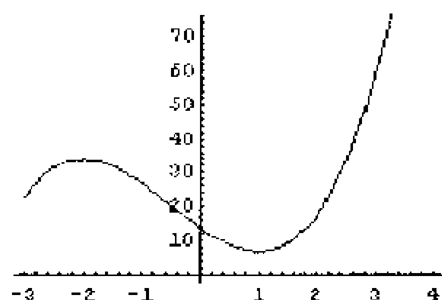


图 2-4-5

求函数的最大值和最小值。

```
In[]:=Solve[f'[x]==0,x]
Out[]=
    {{x→ -2}, {x→1}}
In[]:=Print[f[-3], "   ", f[-2], "   ", f[1], "   ", f[4]]
Out[]=
    23  34  7  142
```

比较知：$f(4)=142$，$f(1)=7$ 分别为函数在 $[-3,4]$ 上的最大值和最小值。也可以输入以下程序直接把函数的最值求出来：

```
In[]:=Clear[f,k,x];a=-3;b=4;
      f[x_]:=2x^3+3x^2-12x+14;
      z=Solve[D[f[x],x]==0,x]//N;
      k=Union[({x,f[x]}/.z),{{a,f[a]},{b,f[b]}}];
      fk={};l=Length[k];
      For[i=1,i<=l,i++,
      If[(k[[i,1]]>=a)&&(k[[i,1]]<=b),
      fk=Append[fk,k[[i,2]]]]];
      pmax=Position[k, Max[fk]][[1,1]];
      pmin=Position[k, Min[fk]][[1,1]];
      Print[k[[pmax]],"    ",k[[pmin]]]
Out[]=
      {4, 142}   {1., 7.}
```

例 2.4.5 利用导数知识与计算机辅助相结合的方法描绘函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形。

用 **Plot** 函数画图，输出图形如图 2-4-6 所示。

```
In[]:=f[x_]:=1+36x/(x+3)^2;
      Plot[f[x],{x,-100,100}]
Out[]=
      - Graphics -
```

显然函数图形很不准确。我们适当调整 x, y 的取值范围可以把图形画得更准确（如图 2-4-7 所示）。

```
In[]:=Plot[f[x], {x, -20, 20}, PlotRange -> {-25, 5}]
Out[]=
      - Graphics -
```

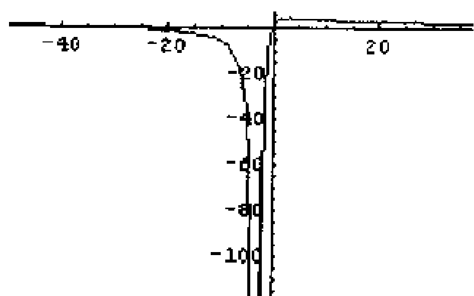


图 2-4-6

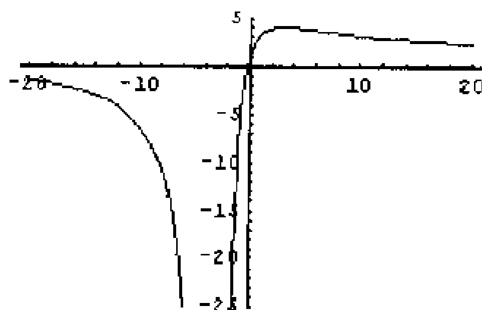


图 2-4-7

下面利用导数知识来描绘函数的图形。

求函数的驻点：

```
In[]:=Solve[f' [x]==0,x]
Out[]=
      {{x→ 3}}
In[]:=f[3]
Out[]=
      4
```

求曲线的拐点：

```
In[]:=Solve[f' ' [x]==0,x]
Out[]=
      {{x→ 6}}
In[]=f[6]
Out[]=
      11/3
```

讨论曲线的渐近线：

```
In[]:=Limit[1+36x/(x+3)^2,x->-3]
Out[]=
      -∞
In[]:=Limit[1+36x/(x+3)^2,x->Infinity]
Out[]=
      1
```

由此知曲线有一条水平渐近线 $y=1$ 和一条铅直渐近线 $x=-3$。

例 2.4.6 求方程 $e^x-3x=0$ 的根。

本题的求解方法有以下3种。

（1）画出函数 $f(x)=e^x-3x$ 的图形，如图2-4-9所示。

```
In[]:= f[x_]:=E^x-3x;
       Plot[f[x],{x,-5,5}]
Out[]=
       - Graphics -
```

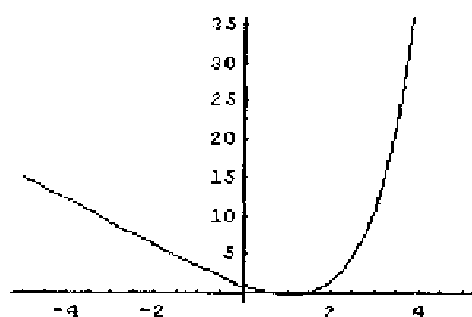


图2-4-9

由图知：$f(x)$ 与 x 轴有两个交点，即方程 $e^x-3x=0$ 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 内各有一个根。

```
In[]:=FindRoot[E^x-3x==0,{x,1}]
Out[]=
       {x→ 0.619061}
In[]:=FindRoot[E^x-3x==0,{x,2}]
Out[]=
       {x→ 1.51213}
```

（2）分别选 $x_0=0$，$x_1=1$ 为初始值，用Newton迭代法求方程的近似根，使误差不超过 10^{-8}。

```
In[]:=x0=0;x1=1;k=0;
      While[Abs[x0-x1]>10^-8,x0=x1;
      x1=N[x0-f[x0]/f'[x0],10];k++];
      Print["k=",k,"     x=",x1]
Out[]=
       k=6    x=0.619061
In[]:=x0=1;x1=2;k=0;
      While[Abs[x0-x1]>10^-8,x0=x1;
      x1=N[x0-f[x0]/f'[x0],10];k++];
      Print["k=",k,"     x=",x1]
Out[]=
       k=6    x=1.51213
```

经过6次迭代可以求出近似根：$x_1=0.619061$，$x_2=1.51213$。

（3）用二分法求方程在区间[1,2]内的近似根，使误差不超过 10^{-5}。

```
In[]:=Clear[f,x1,x2,x0,i];
    f[x_]:=N[E^x-3x,8];
    x1=0;x2=1;m=5;
    If[f[x1]*f[x2]<0,
    epsi=x2-x1;
    i=0;
    While[epsi>=10^(-m),
    x0=(x1+x2)/2;
    Which[f[x0]*f[x1]<0,{x1=x1;x2=x0;epsi=(x2-x1)},
        f[x0]*f[x1]>0,{x1=x0;x2=x2;epsi=(x2-x1)},f[x0]=0,epsi=0];
            i++
        ];
    Print["The root is ",N[x0,8]];
    Print["i=",i],
    Print["Not sure"]]
Out[]=
    The root is 0.619057
    i=17
```

经过 17 次迭代可以求出近似根：$x_1=0.619057$，同样可以求出方程在区间[1，2]内的近似根为 $x_2=1.51214$。

例 2.4.7 试决定 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d，使得点 $x=-2$ 为函数的极值点，极值为 44，$(1,-10)$ 为曲线的拐点。

```
In[]:=Clear[f,x,a,b,c,d];
    f[x_]:=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
    Solve[{f[-2]==44,f'[-2]==0,f[1]==-10,f''[1]==0},{a,b,c,d}]//N
Out[]=
    {{a→1., b→-3., c→-24., d→16.}}
```

实验内容

练习 1　用 Mathematica 证明下列不等式。

（1）$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$；

（2）当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$。

练习 2　用 Mathematica 证明方程 $\sin x=x$ 只有一个实根。

练习 3　设 $f(x)=x+\sin x$，分别画出 $f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$ 的图形，并讨论单调函数的导

函数是否仍为单调函数.

练习 4 用图形与分析结合的方法研究下列函数（图形）的单调性、凹凸性、极值、拐点:

（1） $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$；

（2） $f(x)=x+\dfrac{1}{x},(x>0)$；

（3） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$。

练习 5 问 a,b 为何值时 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

练习 6 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值:

（1） $f(x)=2x^3-3x^2,-1\le x\le 4$；

（2） $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x+1, & x\le 0\end{cases},-1\le x\le 1$。

练习 7 用图形与分析结合的方法确定 c 的取值范围，使方程 $\ln x=cx$ 有惟一解。

练习 8 先观察函数 $y=x^5+5x+1$ 的图形，选择合适的初始值，然后用 Newton 迭代法求方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $(-1,0)$ 内的实根，使误差不超过 0.001。

练习 9 用图形与导数知识相结合的方法画出下列函数的图形:

（1） $y=\dfrac{x^2}{1+2x}$；

（2） $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$；

（3） $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$。

实验 2-5　一元函数积分的计算

实验目的

掌握用 Mathematica 计算一元函数各种类型积分的方法。

实验的基本理论与方法

1. 原函数与不定积分的概念（略）。
2. 不定积分的换元法和分部积分法（略）。
3. 定积分的概念（略）。
4. 微积分基本公式（略）。
5. 广义积分的敛散性及其计算方法（略）。
6. 定积分的近似计算：用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的小区间，每个小区间长度为

$$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}\quad x_i=a+(b-a)i/n,\ \ x_{i+1}=x_i+\frac{b-a}{n}\quad y_i=f(x_i)$$

矩形法公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

梯形法公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}]$$

抛物线法公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]$$

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Integrate[f[x],x]**：求 $f(x)$ 的不定积分。
2. **Integrate[f[x],{x,a,b}]**：求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分。
3. **NIntegrate[f[x],{x,a,b}]**：求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的数值积分。
4. **Integrate[f[x],{x,-Infinity, +Infinity }]**：计算广义积分。
5. **Apart[f[x]]**：部分分式。

实验指导

例 2.5.1 计算不定积分 $\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[E^(a*x)*Cos[b*x],x];Simplify[%]
Out[]=
```

$$\frac{e^{ax}\,(a\,\mathrm{Cos}[b\,x]+b\,\mathrm{Sin}[b\,x])}{a^2+b^2}$$

例 2.5.2 计算不定积分 $\int\frac{x+\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[(x+Sin[x])/(1+Cos[x]),x]
Out[]=
```

$$\frac{2\,x\,\mathrm{Cos}\left[\frac{x}{2}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{x}{2}\right]}{1+\mathrm{Cos}[x]}$$

例 2.5.3 计算不定积分 $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[x^3/(1+x^8)^2,x]
Out[]=
```

$$\frac{x^4}{8\,(1+x^8)}-\frac{1}{8}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{x^4}\right]$$

例 2.5.4 计算不定积分 $\int\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[1/x^4/(1+x^2)^(1/2),x]
Out[]=
```

$$\left(-\frac{1}{3\,x^3}+\frac{2}{3\,x}\right)\sqrt{1+x^2}$$

例 2.5.5 计算定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin x}\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[1/(5+3Sin[x]),{x,0,2Pi}]
Out[]=
```

$$\frac{\pi}{2}$$

例 2.5.6 计算定积分 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[x^2*Sqrt[a^2-x^2],{x,0,a}]
Out[]=
```

$$\frac{a^4 \pi \, \text{Sign}[a]}{16 \sqrt{\text{Sign}[a]^2}}$$

例 2.5.7 计算广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x$。

先判断广义积分 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x$ 是否收敛。

```
In[]:=Integrate[1/(x^2+2x+2),{x,0,+Infinity}]
Out[]=
```

$$\frac{\pi}{4}$$

```
In[]:=Integrate[1/(x^2+2x+2),{x,-Infinity,0}]
Out[]=
```

$$\frac{3\pi}{4}$$

即上面两个广义积分收敛，故原广义积分收敛。下面计算其值。

```
In[]:=Integrate[1/(x^2+2x+2),{x,-Infinity,+Infinity}]
Out[]=
```

$$\pi$$

例 2.5.8 计算广义积分 $\int_{1}^{e} \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} \mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[1/x/Sqrt[1-(Log[x])^2],{x,1,E}]
Out[]=
```

$$\frac{\pi}{2}$$

例 2.5.9 计算广义积分 $\int_{0}^{2} \frac{1}{(1-x)^2} \mathrm{d}x$。

```
In[]:=Integrate[1/(1-x)^2,{x,0,2}]
Out[]=
```

$$\infty$$

即广义积分发散。

例 2.5.10 求积分 $\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$ 的近似值。

被积函数的原函数不能用初等函数表示，我们可以计算它的数值积分。

```
In[]:=NIntegrate[E^(-x^2),{x,0,1}]
Out[]=
    0.746824
```

例 2.5.11 求积分 $\int_{0}^{\pi/4} \ln(1+\tan x) \mathrm{d}x$ 的近似值。

```
In[]:=NIntegrate[Log[1+Tan[x]],{x,0,Pi/4}]
Out[]=
      0.272198
```

例 2.5.12 求导数 $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$。

```
In[]:=D[Integrate[Cos[Pi*t^2],{t,Sin[x],Cos[x]}],x]
Out[]=
      -Cos[x] Cos[π Sin[x]^2] - Cos[π Cos[x]^2] Sin[x]
```

例 2.5.13 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, x\geq 0\\ \frac{1}{1+e^x}, x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$。

```
In[]:=f[x_]:=If[x<0,1/(1+E^x),1/(1+x)]
      NIntegrate[f[x-1],{x,0,2}]
Out[]=
      1.31326
```

例 2.5.14 分别用矩形法、梯形法、抛物线法计算定积分 $\int_0^1 x^2dx$。

为了便于比较，首先计算积分的精确值：

```
In[]:=Clear[x];
      y[x_]=x^2;
      Integrate[y[x],{x,0,1}]
Out[]=
      1
      -
      3
```

（1）矩形法。

```
In[]:=Clear[y,x,s1,n,b,a];
      n=20;a=0;b=1;
      y[x_]:=x^2;
      s1=(b-a)/n*Sum[y[a+i(b-a)/n],{i,0,n-1}]//N;
      s2=(b-a)/n*Sum[y[a+i(b-a)/n],{i,1,n}]//N;
      Print["s1=",s1,"        s2=",s2]
Out[]=
      s1=0.30875        s2=0.35875
```

（2）梯形法

```
In[]:=Clear[y, x, a, b, ss3,s3];
      y[x_] := x^2;
      n = 20; a = 0; b = 1;
      ss3 = Sum[y[a + i*(b - a)/n], {i, 1, n - 1}];
```

```
        s3 = (y[a]/2 + y[b]/2 + ss3)*(b - a)/n // N;
        Print["s3=", s3]
Out[]=
        s3=0.33375
```

（3）抛物线法

```
In[]:=Clear[y,x,a,b,s3];
        y[x_]:=x^2;
        n=2m;a=0;b=1;m=10;
        ss1=Sum[(1+(-1)^i)*y[a+i*(b-a)/n],{i,1,n-1}];（ * ss1=2y_2+2y_4+…+2y_{n-2} * ）
        ss2=Sum[(1-(-1)^i)*y[a+i*(b-a)/n],{i,1,n-1}];（ * ss2=2y_1+2y_3+…+2y_{n-1} * ）
        s4=N[(y[a]+y[b]+ss1+2ss2)*(b-a)/3/n,20];
        Print["s4=",s4]
Out[]=
        s4=0.33333333333333333333
```

由上述结果可知：抛物线法近似程度最好，矩形法近似程度最差。

实验内容

练习 1　用 Mathematica 求解下面各类积分。

（1）$\int \frac{x^3+3x^2-5}{(x^2-2x-6)(x^3+x+1)}\mathrm{d}x$;

（2）$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\mathrm{d}x$;

（3）$\int a^x \sin x\cos^2 x\mathrm{d}x$;

（4）$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x$;

（5）$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$;

（6）$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$;

（7）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin 2t\mathrm{d}t$;

（8）$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

（9）$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$;

（10）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ x, & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx$。

练习 2　（1）将有理真分式

$$f(x)=\frac{12x^5-7x^3-13x^2+8}{100x^6-80x^5+116x^4-80x^3+41x^2-20x+4}$$

分解为部分真分式之和。

（2）利用（1）的结果计算不定积分 $\int f(x)dx$，并且画出 $f(x)$ 和 $\int f(x)dx$ 的图形。

（3）利用 $f(x)$ 的图形研究 $\int f(x)dx$ 图形的主要特征。

练习 3　试找出几道 Mathematica 不能求解的积分题。

实验 2-6　定积分的应用

实验目的

掌握用 Mathematica 计算有关定积分应用的各种题型。

实验的基本理论与方法

1. 利用定积分计算平面图形的面积。

由连续曲线 $y=f(x)$ （$f(x)\ge 0$），直线 $x=a, x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. 利用定积分计算旋转体的体积。

由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a, x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积为

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

3. 利用定积分计算平面曲线的弧长。

设曲线弧由参数方程：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\quad (\alpha\le t\le\beta)$$

给出，其中 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，则曲线弧的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Solve[{方程 1,方程 2},{变量 1,变量 2}]**：求解二元方程组。
2. **Plot[f[x],{x,a,b}]**：画一元函数图形。
3. **ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,t1,t2}]**：二维参数作图。
4. **ParametricPlot3D[{x=x[u,v],y=y[u,v],z=z[u,v]},{u,a,b},{v,c,d}]**：三维参数作图。
5. **Integrate[f[x],{x,a,b}]**：计算定积分。
6. **Show[f1,f2]**：将函数图形组合显示。

实验指导

例 2.6.1 求由抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $y=-x+4$ 所围图形的面积。

首先画出函数图形，如图 2-6-1 所示。

```
In[]=Plot[{Sqrt[2x],-Sqrt[2x],-x+4},{x,0,9}]
Out[]=
        - Graphics -
```

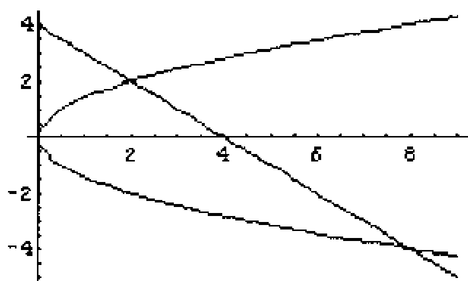


图 2-6-1

然后求出两条曲线的交点：

```
In[]:=Solve[{y^2-2x==0,y+x-4==0},{x,y}]
Out[]=
        {{x→ 2, y→ 2}, {x→ 8, y→ -4}}
```

再以 y 为积分变量求面积：

```
In[]=s=Integrate[-y+4-y^2/2,{y,-4,2}]
Out[]=
        18
```

例 2.6.2 求由圆 $r=3\cos\theta$ 和双纽线 $r=1+\cos\theta$ 所围图形的面积。

首先求出两条曲线的交点：

```
In[]=Solve[{r-3Cos[t]==0,r-1-Cos[t]==0},{r,t}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{r\to\frac{3}{2},\ t\to-\frac{\pi}{3}\right\},\left\{r\to\frac{3}{2},\ t\to\frac{\pi}{3}\right\}\right\}$$

然后画出两曲线所围的图形，如图 2-6-2 所示。

```
In[]=f1=ParametricPlot[{3Cos[t]Cos[t],3Cos[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}];
     f2=ParametricPlot[{(1+Cos[t])Cos[t],(1+Cos[t])Sin[t]},{t,0,2Pi}];
     Show[f1,f2,AspectRatio->Automatic]
Out[]=
        - Graphics -
```

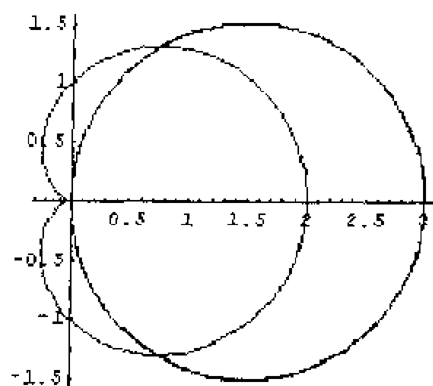


图 2-6-2

再利用定积分计算面积。

```
In[]:=s1= Integrate[1+Cos[t],{t,0,Pi/3}]
Out[]=
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$$

```
In[]:=s2= Integrate[3Cos[t],{t,Pi/3,Pi/2}]
Out[]=
```

$$3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

```
In[]:=s=2*(s1+s2)
Out[]=
```

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right)$$

例 2.6.3 求曲线 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \end{cases}$ 上相应于从 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段弧长。

首先画出曲线的图形，如图 2-6-3 所示。

```
In[]:=ParametricPlot[{ArcTan[t],(1/2)*Log[1+t^2]},{t,-2,2},
                    AspectRatio->Automatic]
Out[]=
     - Graphics -
```

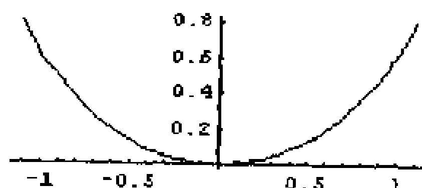


图 2-6-3

再利用定积分计算曲线的弧长：

```
In[]:=dx=D[ArcTan[t],t]
Out[]=
```

$$\frac{1}{1+t^2}$$

In[]:=dy=D[(1/2)Log[1+t^2],t]

Out[]=

$$\frac{t}{1+t^2}$$

In[]:=s=Integrate[Sqrt[dy^2+dx^2],{t,0,1}]//N

Out[]=

0.881374

例 2.6.4 将星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$所围成的图形绕x轴旋转一周，计算所得旋转体的体积。

星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} (0\le t\le 2\pi)$$

取$a=1$，画出星形线的图形，如图 2-6-4 所示。

In[]:=ParametricPlot[{(Cos[t])^3,(Sin[t])^3},{t,0,2Pi},
AspectRatio->Automatic]

Out[]=

- Graphics -

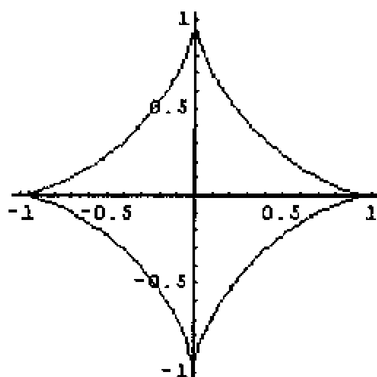


图 2-6-4

利用 Mathematica 计算旋转体的体积：

```
In[]:=x[t_]:= a*Cos[t]^3;
      y[t_]:= a*Sin[t]^3;
      dx=D[x[t],t];
      v=2*Integrate[Pi*(y[t])^2*dx,{t,0,Pi/2}]
```

Out[]=

$$-\frac{32\,a^3\pi}{105}$$

实验内容

练习 1　求由下列曲线所围成的图形绕指定轴旋转所产生的旋转体的体积：

（1）$y=x^2$，$x=y^2$，绕 y 轴；

（2）$x^2+(y-5)^2=16$，绕 x 轴；

（3）摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱，$y=0$，绕直线 $y=2a$。

练习 2　求下列已知曲线所围成的图形的面积：

（1）$y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）；

（2）$r=\sqrt{2}\sin\theta$ 与 $r^2=\cos 2\theta$。

练习 3　计算半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度。

实验 2-7　空间曲面及其在坐标面上的投影

实验目的

掌握用 Mathematica 绘制空间曲面及其在坐标面上投影的方法。

实验的基本理论与方法

1. 描绘空间图形的截痕法（略）。

2. 空间曲线在坐标面上的投影：设曲线 L 的方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，消去 z，得 $H(x,y)=0$，则曲线 L 在 XOY 平面上的投影曲线为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Plot3D[z[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]**：描绘函数 $z=z(x,y)$ 的图形。
2. **ParametricPlot3D[{x[t,s],y[t,s],z[t,s]},{t,a,b},{s,c,d}]**：描绘三维参数图形。
3. **Show[f1,f2,f3…]**：将多个图形组合重新显示。

实验指导

例 2.7.1　画出椭球面 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$ 的图形。

椭球面参数方程为：$\begin{cases}x=3\cos t\sin s\\y=5\sin t\sin s\\z=2\cos s\end{cases}$，$(0\le t\le 2\pi, 0\le s\le \pi)$。

画出椭球面的图形，如图 2-7-1 所示。

```
In[]:=a=3;b=5;c=2;
    ParametricPlot3D[{a*Cos[t]*Sin[s],b*Sin[t]*Sin[s],
    c*Cos[s]},{t,0,2Pi},{s,0,Pi}]
Out[]=
    - Graphics3D -
```

例 2.7.2　画出莫比乌斯(Mobius)带的图形。莫比乌斯带的参数方程为：

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = 2v\sin\dfrac{t}{2} \end{cases},(0 \le t \le 2\pi,-1 \le v \le 1)$$

其中 $r = 4 + v\cos\dfrac{t}{2}$ 是辅助函数。

画出莫比乌斯带的图形，如图 2-7-2 所示。

```
In[]:=r[t_,v_]:=4+v*Cos[t/2];x[t_,v_]:=r[t,v]*Cos[t];
      y[t_,v_]:=r[t,v]*Sin[t];z[t_,v_]:=2v*Sin[t/2];
      ParametricPlot3D[{x[t,v],y[t,v],z[t,v]},{t,0,2Pi},{v,-1,1}]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

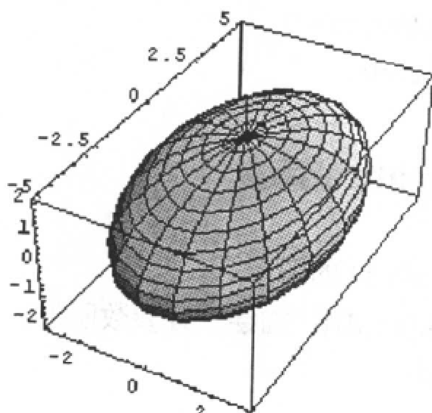


图 2-7-1

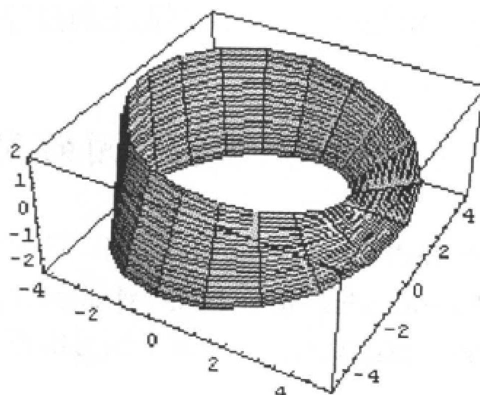


图 2-7-2

在计算重积分的时候，为了确定积分变量的上、下限，我们通常要知道积分区域在某个坐标面上的投影域，利用 Mathematica 可以绘制空间曲面在坐标面上的投影。

例 2.7.3 画出椭圆抛物面 $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ 的图形，并观察其在各坐标面上的投影。

椭圆抛物面参数方程为：$\begin{cases} x = 2u\sin v \\ y = 3u\cos v \\ z = u^2 \end{cases}$，$(0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi)$。

画出椭圆抛物面的图形，如图 2-7-3 所示。

```
In[]:=Clear[u,v];
      d1=ParametricPlot3D[{2u*Sin[v],3u*Cos[v],u^2},{u,0,5},{v,0,2Pi}]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

画出曲面在平面 $x = -10$ 上的投影，如图 2-7-4 所示。

In[]:=d2=ParametricPlot3D[{-10,3u*Cos[v],u^2},{u,0,5},{v,0,2Pi}]

Out[]=

- Graphics3D -

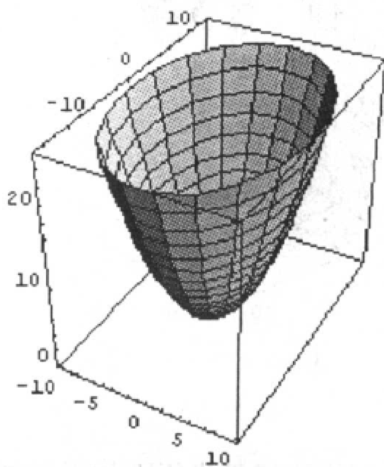


图 2-7-3

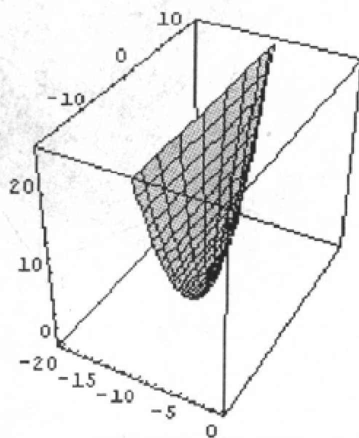


图 2-7-4

画出曲面在平面 $y=15$ 上的投影，如图 2-7-5 所示。

In[]:=d3=ParametricPlot3D[{2u*Sin[v],15,u^2},{u,0,5},{v,0,2Pi}]

Out[]=

- Graphics3D -

画出曲面在 *XOY* 坐标面上的投影，如图 2-7-6 所示。

In[]:=d4=ParametricPlot3D[{2u*Sin[v],3u*Cos[v],0},{u,0,5},{v,0,2Pi}]

Out[]=

- Graphics3D -

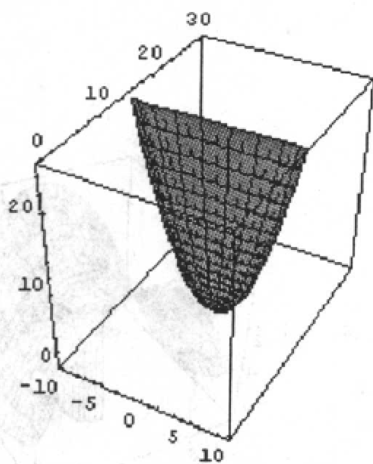


图 2-7-5

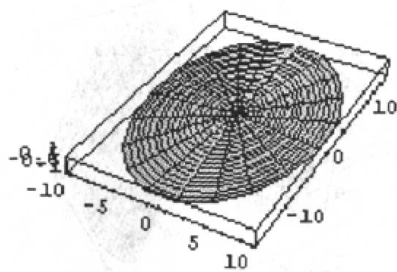


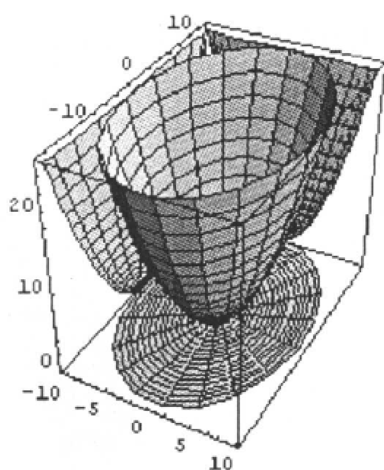
图 2-7-6

将上述图形组合，图形如图 2-7-7（a)，(b）所示。

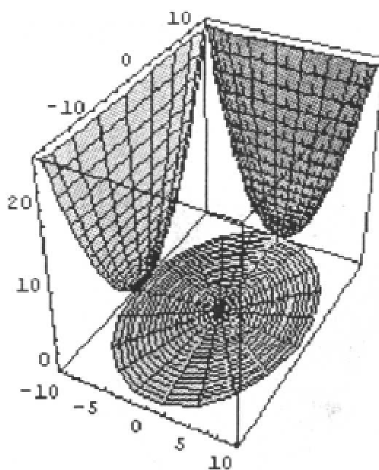
In[]:=Show[d1,d2,d3,d4];Show[d2,d3,d4]

Out[]=

- Graphics3D -



(a)



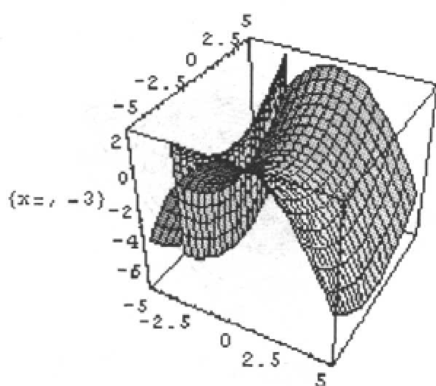
(b)

图 2-7-7

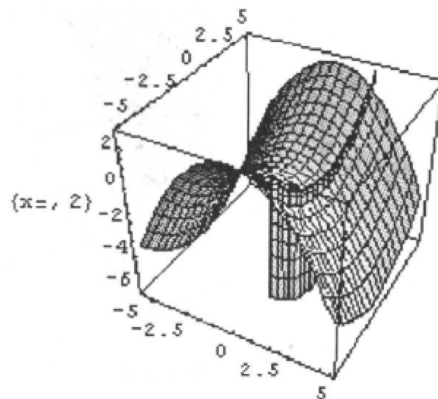
例 2.7.4 画出双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 的图形，并观察平行于坐标面的平面与其交线的形状。

双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 参数方程为：$x=x, y=y, z=-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$。下面观察平面 $x=k$ 与曲面交线的形状，其部分图形如图 2-7-8 所示。

```
In[]:=s1 = ParametricPlot3D[{x, y, -x^2/4 + y^2/9}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}];
    For[k = -4, k < 5, k = k + 1,
        s2 = ParametricPlot3D[{k, y, -x^2/4 + y^2/9},
                                    {x, -5, 5}, {y, -5, 5},DisplayFunction -> Identity];
    Show[s1, s2, AxesLabel -> {"x=", k}]]
Out[]=
    - Graphics3D -
```



(a)



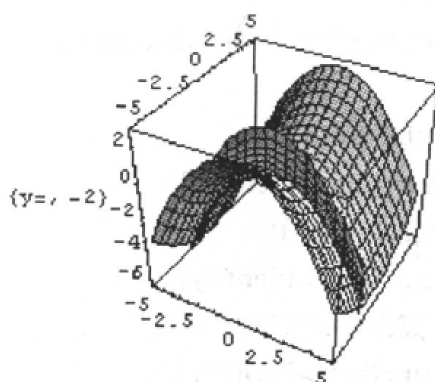
(b)

图 2-7-8

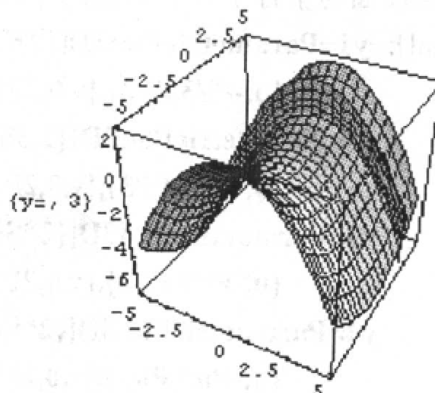
观察平面 $y=k$ 与曲面交线的形状，其部分图形如图 2-7-9 所示。

```
In[]:=s1 = ParametricPlot3D[{x, y, -x^2/4 + y^2/9}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}];
```

```
For[k = -4, k < 5, k++,
  s3 = ParametricPlot3D[{x, k, -x^2/4 + y^2/9}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
                          DisplayFunction -> Identity];
Show[s1, s3, AxesLabel -> {"y=", k}]]
```



(a)

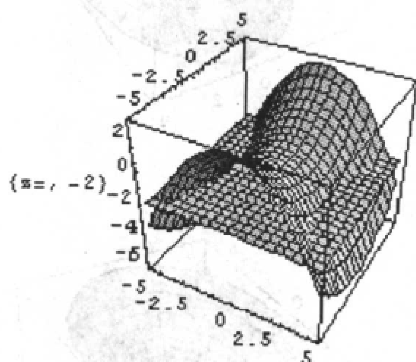


(b)

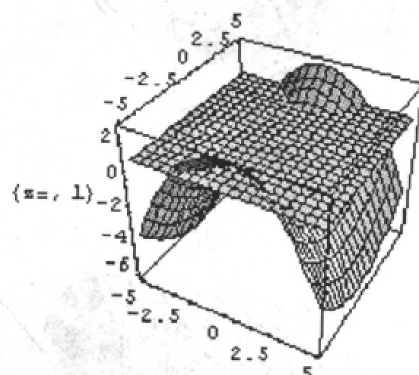
图 2-7-9

观察平面 $z=k$ 与曲面交线的形状，其部分图形如图 2-7-10 所示。

```
In[]:=s1 = ParametricPlot3D[{x, y, -x^2/4 + y^2/9}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}];
   For[k = -4, k < 3, k++,
      s4 = ParametricPlot3D[{x, y, k}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
                              DisplayFunction -> Identity];
   Show[s1, s4, AxesLabel -> {"z=", k}]]
```



(a)



(b)

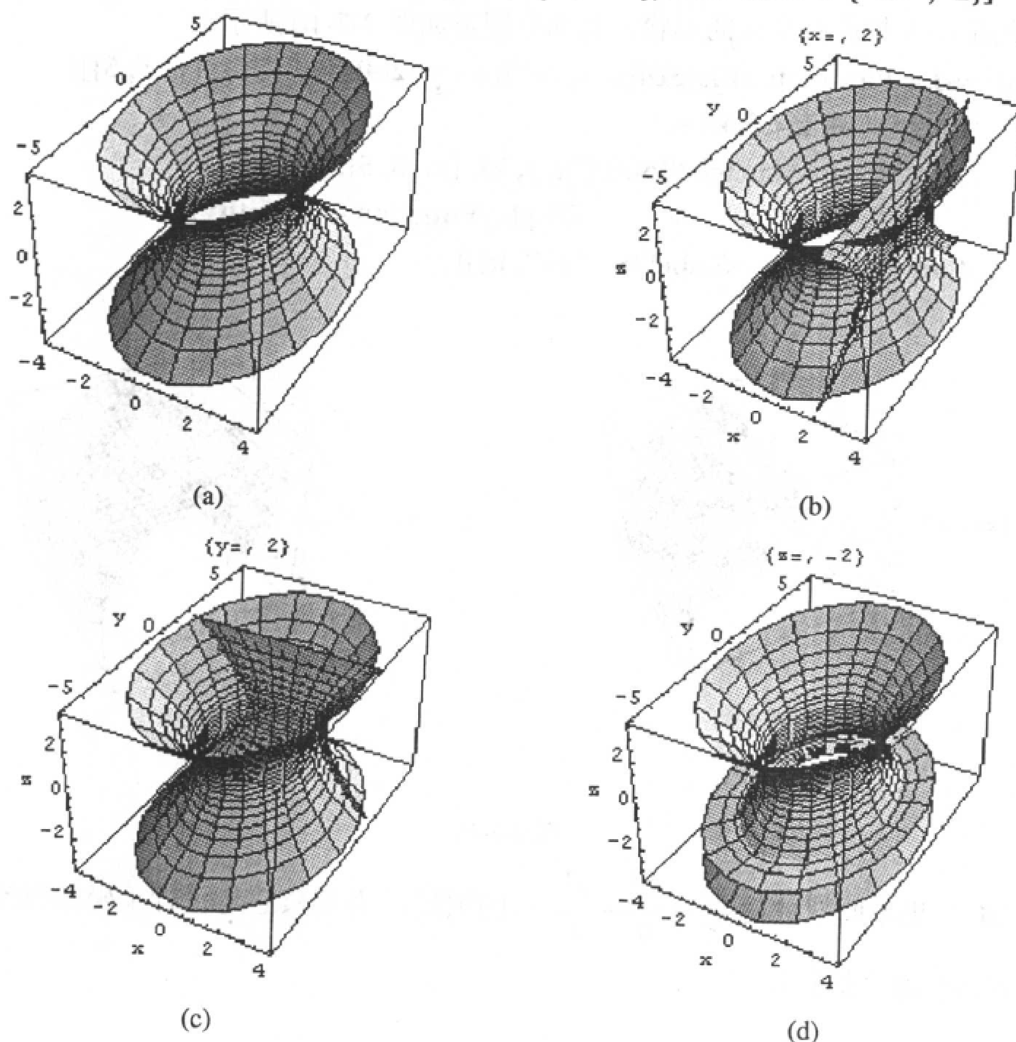
图 2-7-10

例 2.7.5 画出单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ 的图形，并观察它与平行于坐标面的平面的交线及其在各坐标面上的投影。

单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$的参数方程为：$\begin{cases} x=2\sec u\sin v \\ y=3\sec u\cos v \\ z=2\tan u \end{cases}$，$(-\frac{\pi}{3}\le u\le\frac{\pi}{3},0\le v\le 2\pi)$。

先观察曲面与平行于各坐标面的平面的交线，如图 2-7-11 所示。

```
In[]:=y1=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],3Sec[u]*Cos[v],2Tan[u]},
        {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi}]
    y2=ParametricPlot3D[{2,3Sec[u]*Cos[v],2Tan[u]},
        {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    y3=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],2,2Tan[u]},
        {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    y4=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],3Sec[u]*Cos[v],-2},
        {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    Show[y1, y2, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"x=", 2}];
    Show[y1, y3, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"y=", 2}]
    Show[y1, y4, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"z=", -2}]
```

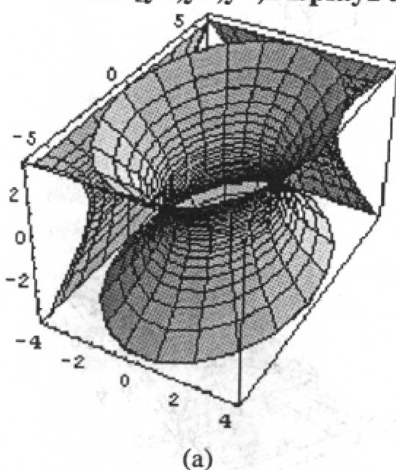


(a) (b) (c) (d)

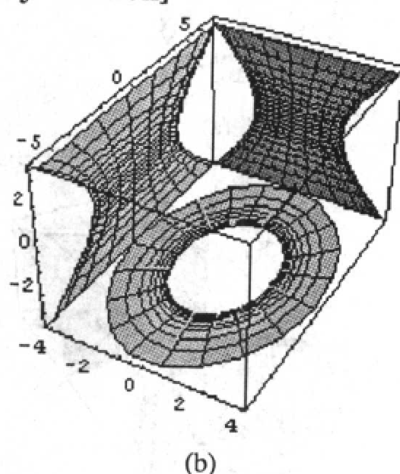
图 2-7-11

再观察曲面在各坐标面上的投影，如图 2-7-12 所示。

```
In[]:=Clear[u,v];
    y1=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],3Sec[u]*Cos[v],2Tan[u]},
         {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi}];
    y2=ParametricPlot3D[{-4,3Sec[u]*Cos[v],2Tan[u]},
         {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    y3=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],6,2Tan[u]},
         {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    y4=ParametricPlot3D[{2*Sec[u]*Sin[v],3Sec[u]*Cos[v],-3.5},
         {u,-Pi/3,Pi/3},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    Show[y1,y2,y3,y4]
    Show[y2,y3,y4,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



(a)



(b)

图 2-7-12

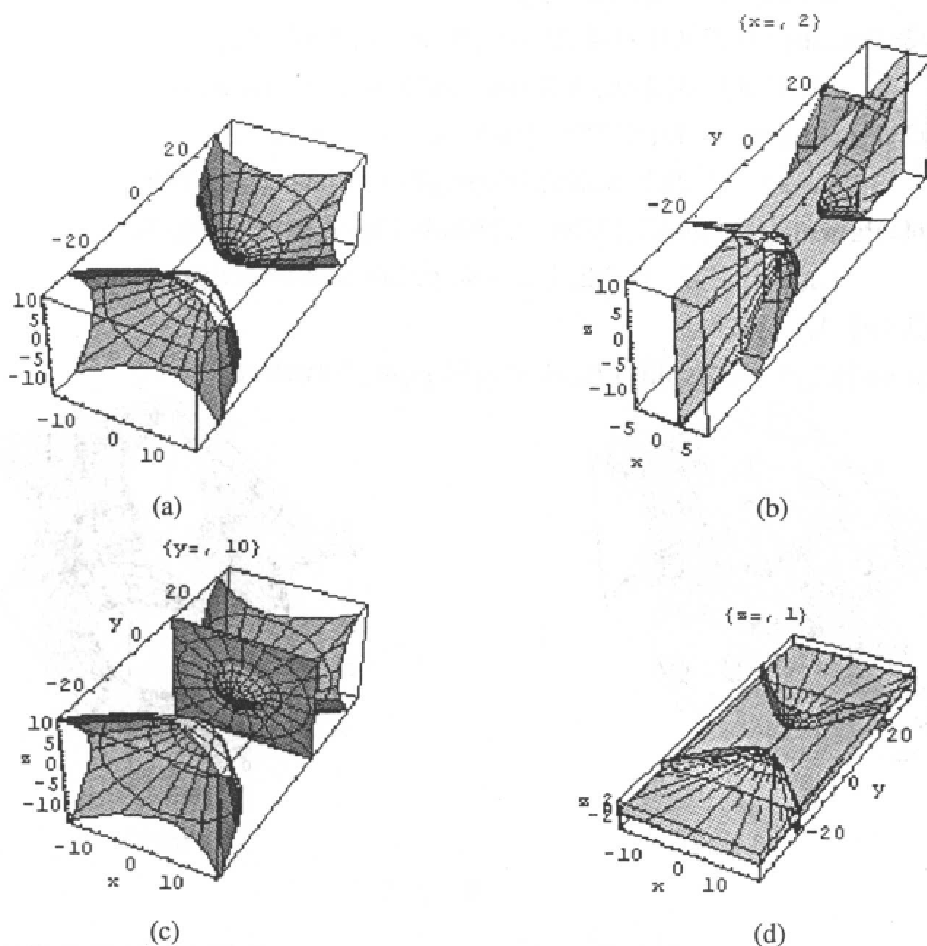
例 2.7.6 画出双叶双曲面 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=-1$ 的图形，并观察它与平行于坐标面的平面的交线。

双叶双曲面 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=-1$ 的参数方程为：$\begin{cases} x=4|\tan u|\sin v \\ y=5\sec u \\ z=3|\tan u|\cos v \end{cases}$，$(0\le u\le \pi, 0\le v\le 2\pi)$。

观察它与平行于坐标面的平面的交线，如图 2-7-13 所示。

```
In[]:=r1=ParametricPlot3D[{4Abs[Tan[u]]*Sin[v],5Sec[u],
         3Abs[Tan[u]]*Cos[v]},{u,0,Pi},{v,0,2Pi}];
    r2=ParametricPlot3D[{2,5Sec[u],3Abs[Tan[u]]*Cos[v]},
         {u,0,Pi},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    r3=ParametricPlot3D[{4Abs[Tan[u]]*Sin[v],10,3Abs[Tan[u]]*Cos[v]},
         {u,0,Pi},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
    r4=ParametricPlot3D[{4Abs[Tan[u]]*Sin[v],5Sec[u],1},
         {u,0,Pi},{v,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
```

```
Show[r1,r2, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"x=", 2}]
Show[r1,r3, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"y=", 10}]
Show[r1,r4, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"z=", 1}]
```



(a) (b)

(c) (d)

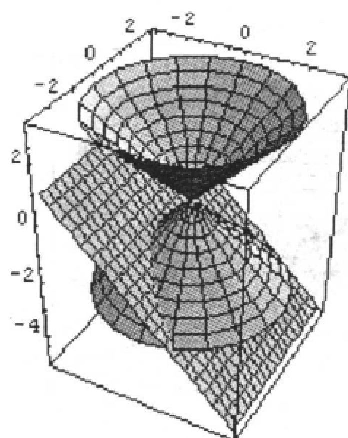
图 2-7-13

例 2.7.7 画出圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 的图形，并观察不同平面与圆锥面的交线的形状。

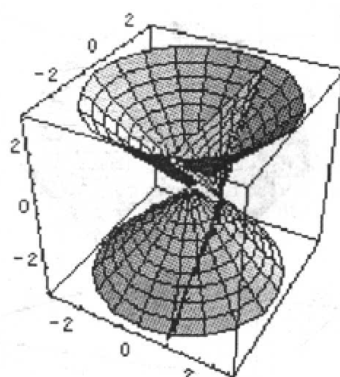
圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ 的参数方程为：$\begin{cases} x = u\sin v \\ y = u\cos v \\ z = u \end{cases}$，$(-3 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi)$。

观察不同平面与圆锥面的交线的形状，如图 2-7-14 所示。

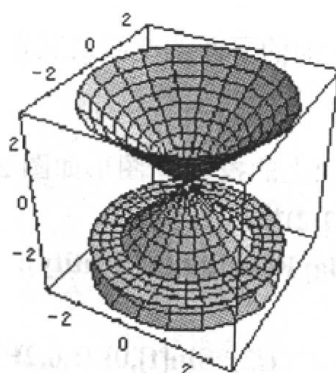
```
In[]:=t1=ParametricPlot3D[{u*Sin[v],u*Cos[v],u},{u,-3,3},{v,0,2Pi}];
    t2=ParametricPlot3D[{1,u*Cos[v],u},{u,-3,3},{v,0,2Pi}];
    t3=ParametricPlot3D[{x,y,-2-x},{x,-3,3},{y,-3,3}];
    t4=ParametricPlot3D[{u*Sin[v],u*Cos[v],-2},{u,-3,3},{v,0,2Pi}];
    t5=ParametricPlot3D[{x,y,-3/2-x/2},{x,-3,3},{y,-3,3}];
    Show[t1,t3];Show[t1,t2];Show[t1,t4];Show[t1,t5]
```



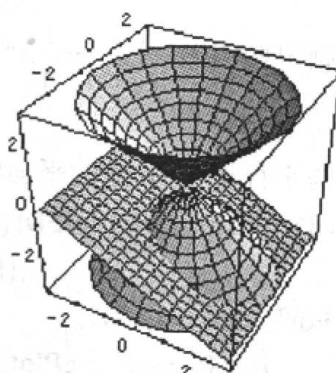
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2-7-14

例 2.7.8 描绘上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与锥面 $z+2=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体，并观察在 *YOZ* 面上的投影。

画出半球面，锥面，它们所围成的立体及其在 *YOZ* 面上的投影的图形，如图 2-7-15 所示。

```
In[]:=d1=ParametricPlot3D[{2*Cos[t]*Sin[s],2*Sin[t]*Sin[s],
                          2*Cos[s]},{t,0,2Pi},{s,0,Pi/2}];
      d2=ParametricPlot3D[{u*Sin[v],u*Cos[v],u-2},{u,0,2},{v,0,2Pi}];
      Show[d1,d2,ViewPoint->{1,2,0}]
      d3=ParametricPlot3D[{-2,2*Sin[t]*Sin[s],2*Cos[s]},{t,0,2Pi},{s,0,Pi/2},
                          DisplayFunction->Identity];
      d4=ParametricPlot3D[{-2,u*Cos[v],u-2},{u,0,2},{v,0,2Pi},
                          DisplayFunction->Identity];
      Show[d3,d4,d1,d2,ViewPoint->{1,2,0},DisplayFunction->$DisplayFunction]
```

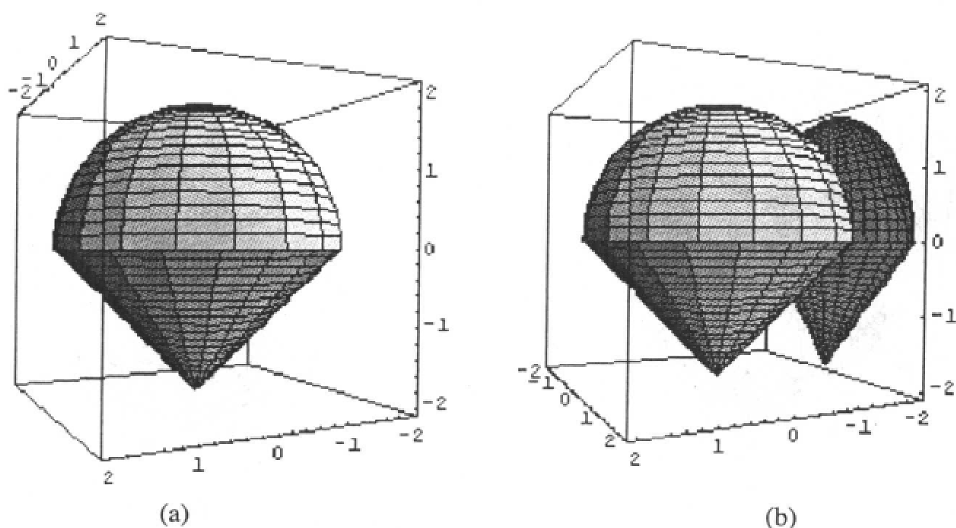


图 2-7-15

例 2.7.9 画出椭圆抛物面 $z=\frac{1}{4}x^2+y^2$ 与平行于 XOY 面的平面的交线及其在坐标面上的投影。

观察曲面与平行于 XOY 面的平面的交线及其在坐标面上的投影 ，图形如图 2-7-16 所示。

```
In[]:=d1=ParametricPlot3D[{2s^(1/2)*Cos[t],s^(1/2)*Sin[t],s},
                         {t,0,2Pi},{s,0,4},DisplayFunction->Identity];
   For[s=0,s<=4,s++,
      d2=ParametricPlot3D[{2s^(1/2)*Cos[t],s^(1/2)*Sin[t],0},{t,0,2Pi},
                         DisplayFunction->Identity];
      d3=ParametricPlot3D[{2r*Cos[t],r*Sin[t],s},{t,0,2Pi},{r,0,2},
                         DisplayFunction->Identity];
      Show[d1,d2,d3,ViewPoint->{1,2,1},DisplayFunction->$DisplayFunction,
                 AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotLabel -> {"z=", s}]]
```

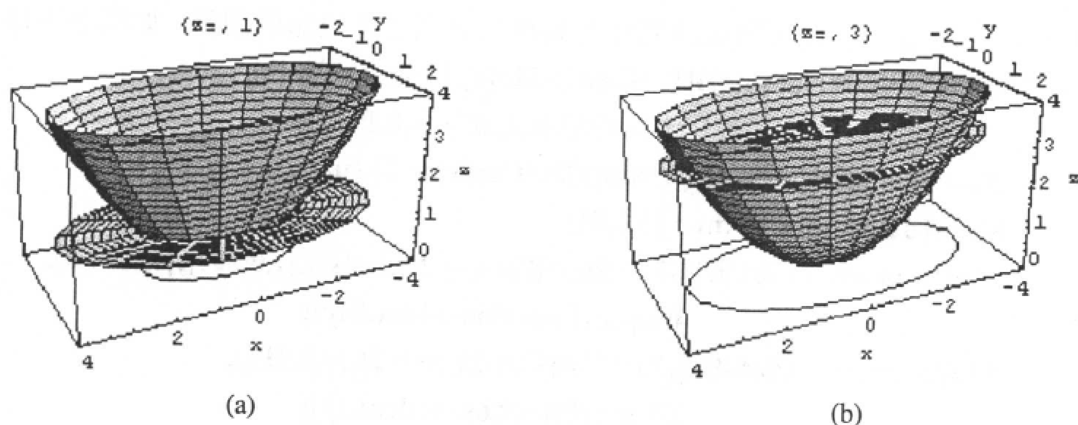


图 2-7-16

实验内容

练习 1　利用计算机画出曲面 $z=2-(x^2+y^2)$ $(0\le z\le 2)$的图形及其在三个坐标面上的投影。

练习 2　画出由方程 $16x^2+4y^2-z^2=0$ 所表示的曲面。

练习 3　画出曲面 $x^2+4y^2+9z^2=36$ 以及曲面在三个坐标面上的投影。

练习 4　求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z^2=2x$ 围成的立体在三个坐标面上的投影。

练习 5　自由练习描绘各种空间图形。

实验 2-8　多元函数微分学

实验目的

掌握用 Mathematica 求解多元函数微分学的各种问题。

实验的基本理论与方法

1. 偏导数的概念及其求法（略）。

2. 全微分的求法：如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微，并且

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

3. 多元复合函数的求导法则（略）。

4. 隐函数的求导公式（略）。

5. 方向导数的求法：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微，那么函数在该点沿任意方向 $l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 的方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

6. 若函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则称向量 $\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记作 $\mathbf{grad}\,f(x,y)$。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **D[f[x,y],x]**：求 f 对 x 的偏导数。
2. **D[f[x,y],x,y]**：求 f 对 x,y 的混合偏导数。
3. **D[f[x,y],{x,n}]**：求 f 对 x 的 n 阶偏导数。
4. **D[f[x,y[x]],x]**：求 f 对 x 的导数,视 y 为 x 的函数。
5. **Dt[f[x,y]]**：求 f 的全微分。
6. **u.v**：求向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的数量积。

实验指导

例 2.8.1 设 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\mathrm{d}z$。

```
In[]:=Clear[z,x,y];
    z[x_,y_]:=Log[Sqrt[x^2+y^2]];
    D[z[x,y],x]
Out[]=
```

$$\frac{x}{x^2+y^2}$$

```
In[]:=D[z[x,y],x]/.{x->1,y->1}
Out[]=
```

$$\frac{1}{2}$$

```
In[]:=D[z[x,y],{x,2}]
Out[]=
```

$$-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}$$

```
In[]:=D[z[x,y],x,y]
Out[]=
```

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

```
In[]:=Dt[z[x,y]]
Out[]=
```

$$\frac{2\,x\,\mathrm{Dt}[x]+2\,y\,\mathrm{Dt}[y]}{2\,(x^2+y^2)}$$

例 2.8.2 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$ 而 $y=a\sin x, z=\cos x$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2},\mathrm{d}u$。

```
In[]:=y[x_]:=a*Sin[x];
    z[x_]:=Cos[x];
    u[x_,y_,z_]:=E^(a*x)*(y[x]-z[x])/(a^2+1);
    D[u[x,y,z],x];Simplify[%]
Out[]=
```

$$e^{ax}\,\mathrm{Sin}[x]$$

```
In[]:=D[u[x,y,z],{x,2}];
    Simplify[%]
Out[]=
```

```
e^(a x) (Cos[x] + a Sin[x])
In[]:=Dt[u[x,y,z],Constants->{a}];
    Simplify[%]
Out[]=
    e^(a x) Dt[x, Constants → {a}] Sin[x]
```

即 $$du = e^{ax}\sin x dx$$

例 2.8.3 设 $z = f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

```
In[]:=D[f[2x-y]+g[x,x*y],x]
Out[]=
    2 f'[2x-y] + y g^(0,1)[x, xy] + g^(1,0)[x, xy]
In[]:=D[f[2x-y]+g[x,x*y],{x,2}];
    Simplify[%]
Out[]=
    4 f''[2x-y] + y^2 g^(0,2)[x, xy] + 2 y g^(1,1)[x, xy] + g^(2,0)[x, xy]
In[]:=D[f[2x-y]+g[x,x*y],x,y]
Out[]=
    -2 f''[2x-y] + g^(0,1)[x, xy] + x y g^(0,2)[x, xy] + x g^(1,1)[x, xy]
```

其中 $g^{(1,0)}[u, v]$ 为 $\frac{\partial g}{\partial u}$，$g^{(0,1)}[u, v]$ 为 $\frac{\partial g}{\partial v}$，$g^{(2,0)}[u, v]$ 为 $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$，$g^{(1,1)}[u, v]$ 为 $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}$，$g^{(0,2)}[u, v]$ 为 $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$。

例 2.8.4 已知 $z = xy + xF(\frac{y}{x})$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$。

```
In[]:=z=x*y+x*F[y/x];
    x*D[z,x]+y*D[z,y]-z-x*y;
        Simplify[%]
Out[]=
    0
```

例 2.8.5 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

有以下两种求解方法：

（1）
```
In[]:=F=x^2+y^2+z^2-4z
Out[]=
    x^2 + y^2 - 4 z + z^2
In[]:=dzx=Simplify[-D[F,x]/D[F,z]]
Out[]=
```

$$\frac{x}{2-z}$$

```
In[]:=dzy=Simplify[-D[F,y]/D[F,z]]
Out[]=
```

$$\frac{y}{2-z}$$

（2）
```
In[]:= eq1 = x^2 + y^2 + z[x]^2 - 4z[x] == 0;
       D[eq1, x];
       Solve[%, z'[x]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{z'[x] \to -\frac{x}{-2+z[x]}\right\}\right\}$$

```
In[]:= eq2 = x^2 + y^2 + z[y]^2 - 4z[y] == 0;
       D[eq2, y];
       Solve[%, z'[y]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{z'[y] \to -\frac{y}{-2+z[y]}\right\}\right\}$$

例 2.8.6 设 $xu-yv=0, yu+xv=1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$。

先求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$。

```
In[]:=D[{x*u[x]-y*v[x]==0,y*u[x]+x*v[x]==1},x];
      Simplify[Solve[%,{u'[x],v'[x]}]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{u'[x] \to -\frac{x\,u[x]+y\,v[x]}{x^2+y^2},\ v'[x] \to \frac{y\,u[x]-x\,v[x]}{x^2+y^2}\right\}\right\}$$

再求 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$。

```
In[]:=D[{x*u[y]-y*v[y]==0,y*u[y]+x*v[y]==1},y];
      Simplify[Solve[%,{u'[y],v'[y]}]]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{u'[y] \to \frac{-y\,u[y]+x\,v[y]}{x^2+y^2},\ v'[y] \to -\frac{x\,u[y]+y\,v[y]}{x^2+y^2}\right\}\right\}$$

例 2.8.7 求函数 $u=xyz$ 在 $P_0(5,1,2)$ 处的梯度，并求沿从点 $P_0(5,1,2)$ 到 $P(9,4,14)$ 方向的方向导数。

先求函数 $u=xyz$ 在 $P_0(5,1,2)$ 处的梯度。

```
In[]:=Clear[a, b, f, x, y, z];
      f[x_, y_, z_] := x y z;
```

```
gradf = Array[b, 3];
b[1] = D[f[x, y, z], x];
b[2] = D[f[x, y, z], y];
b[3] = D[f[x, y, z], z];
gradf /. {x -> 5, y -> 1, z -> 2}
```

Out[]=

{2, 10, 5}

求与 $\overrightarrow{P_0P}$ 同方向的单位向量。

```
In[]:=A = Array[a, 3];
   a[1] = 9 - 5; a[2] = 4 - 1; a[3] = 14 - 2;
   e = A/Sqrt[A.A];
```

求从点 $P_0(5,1,2)$ 到 $P(9,4,14)$ 方向的方向导数。

```
In[]:=dfl = gradf.e /. {x -> 5, y -> 1, z -> 2}
```

Out[]=

$$\frac{98}{13}$$

例 2.8.8 观察函数 $u=xy^2z$ 在点 $P(1,-1,2)$ 处沿什么方向的方向导数最大，并求此方向导数。

先求在点 P 处沿单位向量 $\boldsymbol{e}=\{a,b,c\}$ 方向的方向导数。

```
In[]=Clear[e, a, b, c, t];
   f[x_, y_, z_] := x y^2 z;
   e = {a, b, c};
   gradf = Array[g, 3];
   g[1] = D[f[x, y, z], x]; g[2] = D[f[x, y, z], y];
   g[3] = D[f[x, y, z], z];
   dfe = (gradf /. {x -> 1, y -> -1, z -> 2}).e
```

Out[]=

2a-4b+c

利用拉格朗日乘数法求使方向导数取得最大值的 $\boldsymbol{e}$ 。

```
In[]:=F[a_, b_, c_] := 2a - 4b + c + t(a^2 + b^2 + c^2 - 1);
   s = Solve[{D[F[a, b, c], a] == 0, D[F[a, b, c], b] == 0,
          D[F[a, b, c], c] == 0, a^2 + b^2 + c^2 == 1}, {a, b, c, t}]
```

Out[]=

$$\left\{\left\{a\to-\frac{2}{\sqrt{21}},\ b\to\frac{4}{\sqrt{21}},\ c\to-\frac{1}{\sqrt{21}},\ t\to\frac{\sqrt{21}}{2}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{a\to\frac{2}{\sqrt{21}},\ b\to-\frac{4}{\sqrt{21}},\ c\to\frac{1}{\sqrt{21}},\ t\to-\frac{\sqrt{21}}{2}\right\}\right\}$$

最后求方向导数的最大值。

```
In[]:=dfe /. s[[1]]
Out[]=
    -√21
In[]:=dfe /. s[[2]]
Out[]=
    √21
```

即沿$e_1=\{-\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},-\frac{1}{\sqrt{21}}\}$方向的方向导数最小，沿$e_2=\{\frac{2}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}}\}$ 方向的最大。

```
In[]:=G =gradf /. {x -> 1, y -> -1, z -> 2};
      G/Sqrt[G.G]
Out[]=
    {2/√21, -4/√21, 1/√21}
```

可以看出e_2的方向与点P处的梯度的方向一致，即沿梯度方向的方向导数最大。

实验内容

练习 1　计算下列各题，并自选其中的函数进行画图。

（1）　$u=e^{-x}(y-z)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$，$dz$；

（2）　$z=\arctan(xy), y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$；

（3）　$z=u^2\ln v, u=\frac{x}{y}, v=3x-2y$　，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；

（4）　已知$z=f(xy,\frac{x}{y})$，　其中$f(u,v)$具有两阶连续的偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

练习 2　设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中$f(u)$为可导函数，证明$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$。

练习 3　已知$x^2-xy+2y^2+x-y=1$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$。

练习 4　设$\begin{cases}x=e^u+u\sin v\\y=e^u-u\cos v\end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$。

练习 5　求函数$z=\ln(x+y)$在抛物线$y^2=4x$上点$(1,2)$处沿着抛物线在该点处偏向x轴正向的切线方向的方向导数。

实验 2-9　多元函数微分学的应用

实验目的

掌握用 Mathematica 求解多元函数微分学应用的各种问题。

实验的基本理论与方法

1. 空间曲面的切平面与法线（略）。
2. 空间曲线的切线与法平面（略）。
3. 多元函数极值的充分条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处

（1）$AC-B^2>0$ 时具有极值，当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；
（2）$AC-B^2<0$ 时没有极值；
（3）$AC-B^2=0$ 时不能确定是否有极值。

4. 条件极值与拉格朗日乘数法：求函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值的方法是，构造函数 $F(x,y,z)=f(x,y,z)+t_1\varphi(x,y,z)+t_2\psi(x,y,z)$，求解方程组：

$$\begin{cases} f_x(x,y,z)+t_1\varphi_x(x,y,z)+t_2\psi_x(x,y,z)=0 \\ f_y(x,y,z)+t_1\varphi_y(x,y,z)+t_2\psi_y(x,y,z)=0 \\ f_z(x,y,z)+t_1\varphi_z(x,y,z)+t_2\psi_z(x,y,z)=0 \\ \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

即得到可能的极值点。

5. 最小二乘法与曲线拟合：曲线拟合有多种方法，其中最小二乘法是常用的一种。

最小二乘法的原理是：给定平面上一组点 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，求函数 $f(x)$，使 $\delta=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-y_k]^2$ 达到最小。

设拟合函数的基底为

$$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)$$

拟合函数为

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_m\varphi_m(x)$$

确定 $c_0,c_2,\cdots,c_m$，使方差 δ 达到极小，此时得到的 $f(x)$ 即为所求。Mathematica 提供了最基本的数据拟合函数 **Fit**。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Solve**：求解方程或方程组。
2. **D[f[x,y],{x,y}]**：求多元函数的偏导数。
3. **ParametricPlot3D**：三维参数绘图。
4. **ListPlot**：平面数据散点绘图。
5. **Fit**：平面数据曲线拟和。
6. **u.v**：求向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的数量积。

实验指导

例 2.9.1 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

首先求出函数的驻点，再利用极值的充分条件判断驻点是否为极值点。

```
In[]:=Clear[x,y,z,a,b,c,d,t];
      f[x_,y_]:=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x;
      a=D[f[x,y],{x,2}];
      b=D[f[x,y],x,y];
      c=D[f[x,y],{y,2}];
      d=a*c-b^2;
      t=Solve[{D[f[x,y]==0,x],D[f[x,y]==0,y]},{x,y}];
      l=Length[t];
      For[i=1,i<=l,i++,
        Print[t[[i]]];
        d1=d/.t[[i]];
        a1=a/.t[[i]];
        z=f[x,y]/.t[[i]];
        Which[d1>0&&a1<0,Print["fmax=",z],d1>0&&a1>0,Print["fmin=",z],
              d1 == 0, Print["No Sure"], d1 < 0, Print["No"]]
        ]
Out[]=
      {x→ -3, y→ 0}
      No
      {x→ -3, y→ 2}
      fmax=31
      {x→ 1, y→ 0}
      fmin=-5
      {x→ 1, y→ 2}
```

No

例 2.9.2 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

先画图形如图 2-9-1 所示。

```
In[]:=t1=ParametricPlot3D [{u*Sin[v],u*Cos[v],u^2 },{u,0,2},{v,0,2Pi}];
     t2= ParametricPlot3D [{x,y,1-x-y },{x,-2,2},{y,-2,2}];
     Show[t1,t2,ViewPoint->{-3.291,0.389,0.686}]
Out[]=
     - Graphics3D -
```

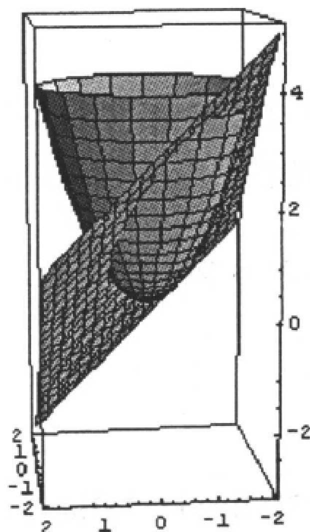


图 2-9-1

再用 Lagrange 乘数法求解。

```
In[]:=f[x_,y_,z_]:=x^2+y^2+z^2;
     g[x_,y_,z_]:=x^2+y^2-z;
     h[x_,y_,z_]:=1-x-y-z;
     F[x_,y_,z_,t1_,t2_]:=f[x,y,z]+t1*g[x,y,z]+t2*h[x,y,z];
     u=NSolve[{D[F[x,y,z,t1,t2]==0,x],D[F[x,y,z,t1,t2] ==0,y],
     D[F[x,y,z,t1,t2]==0,z],g[x,y,z]==0,h[x,y,z]==0},{x,y,z,t1,t2}]
Out[]=
```

$\{\{z\to 3.73205,\ t2\to 13.3509,\ t1\to -5.88675,\ x\to -1.36603,\ y\to -1.36603\},$
$\{z\to -0.5+1.9984\times10^{-15}\,i,\ t2\to 0.+0.\,i,\ t1\to -1.+2.22045\times10^{-15}\,i,$
$x\to 0.75-0.901388\,i,\ y\to 0.75+0.901388\,i\},\ \{z\to -0.5-1.9984\times10^{-15}\,i,$
$t2\to 0.+0.\,i,\ t1\to -1.-2.22045\times10^{-15}\,i,\ x\to 0.75+0.901388\,i,\ y\to 0.75-0.901388\,i\},$
$\{z\to 0.267949,\ t2\to 0.649147,\ t1\to -0.113249,\ x\to 0.366025,\ y\to 0.366025\}\}$

第 2，3 组解是复数，舍去。将 1，4 组解代入。

```
In[]:=f[x,y,z]/.u[[1]];
```

```
     Sqrt[%]
Out[]=
      4.20241
In[]:=f[x,y,z]/.u[[4]];
     Sqrt[%]
Out[]=
      0.582877
```

得到最短距离 0.582877 ，最长距离 4.20241。

例 2.9.3 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在 $x^2+y^2\le 25$ 上的最大值和最小值。

先求 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2<25$ 内的最大值和最小值。

```
In[]:=f[x_, y_] := x^2 + y^2 - 12x + 16y;
     t = Solve[{D[f[x, y] == 0, x], D[f[x, y] == 0, y]}, {x, y}]
Out[]=
      {{x→ 6, y→ -8}}                         (*驻点*)
In[]:=x^2 + y^2 - 25 /. t[[1]]
Out[]=
      75
```

该驻点在圆外，圆内无驻点，故不取得极值。下面考虑圆 $x^2+y^2=25$ 上的最值。这是 $f(x,y)$ 在约束条件 $x^2+y^2=25$ 下的条件极值，用 Lagrange 乘数法求解。

```
In[]:=Clear[x, y, F, t]; F[x_, y_, t_] := f[x, y] + t(x^2 + y^2 - 25);
      s = Solve[{D[F[x, y, t] == 0, x], D[F[x, y, t] == 0, y],
          D[F[x, y, t] == 0, t]}, {x, y, t}]
Out[]=
      {{t→ -3, x→ -3, y→ 4}, {t→ 1, x→ 3, y→ -4}}
In[]:=f[x, y] /. s[[1]]
Out[]=
      125
In[]:=f[x, y] /. s[[2]]
Out[]=
      -75
```

由此可得，在 $x=-3, y=4$ 处取得最大值 125，在 $x=3, y=-4$ 处取得最小值 - 75。

例 2.9.4 求螺旋线 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\\ z=t\end{cases}$，在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法平面方程，并画出图形。

求切点坐标：

```
In[]:=Clear[p, s, n, a, b, t1, t1, t3, t4, x, y, z];
      p = {2Cos[t], 2Sin[t], t} /. t -> Pi/4
Out[]=
```

$$\left\{\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right\}$$

求切线的方向向量：

```
In[]:=s = Array[a, 3];
      a[1] = D[2Cos[t], t] /. t -> Pi/4;
      a[2] = D[2Sin[t], t] /. t -> Pi/4;
      a[3] = D[t, t] /. t -> Pi/4;
      s
Out[]=
```

$$\{-\sqrt{2},\sqrt{2},1\}$$

求切线方程：

```
In[]:=b = {x - Sqrt[2], y - Sqrt[2], z - Pi/4};
      b/s   （* b 与 s 的对应坐标的商，表示直线方程 *）
Out[]=
```

$$\left\{-\frac{-\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}},\frac{-\sqrt{2}+y}{\sqrt{2}},-\frac{\pi}{4}+z\right\}$$

求法平面方程：

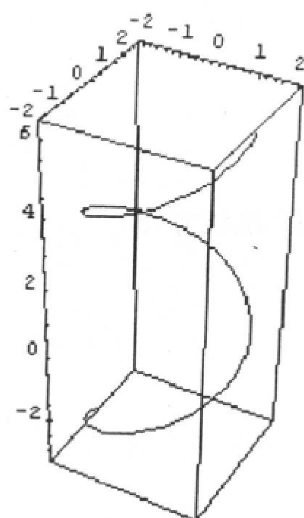
```
In[]:=b.s == 0;Simplify[%]
Out[]=
```

$$\sqrt{2}\,y+z==\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\,x$$

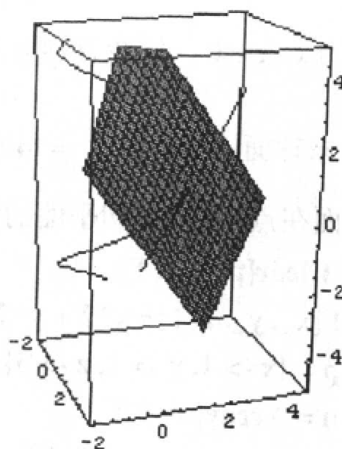
即切线方程为 $-\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=z-\frac{\pi}{4}$，法平面方程为 $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-z+\frac{\pi}{4}=0$。

最后画出螺旋线的切线和法平面的图形，如图 2-9-2 所示。

```
In[]:=t1 = ParametricPlot3D[{2Cos[t], 2Sin[t], t}, {t, -Pi, 2Pi}];
     t2 = ParametricPlot3D[{Sqrt[2] - Sqrt[2]*t, Sqrt[2] + Sqrt[2]*t,
                           Pi/4 + t}, {t, -1.5, 2}];
     t3 = ParametricPlot3D[{x, y, Pi/4 + Sqrt[2] x - Sqrt[2]y},
                           {x, -1, 3}, {y, -1, 3}];
     t4 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], Point[{Sqrt[2], Sqrt[2], Pi/4}]}];
     Show[t1, t2, t3, t4, PlotRange -> {-5, 5},
          ViewPoint -> {3.142, -1.169, 1.097}]
Out[]=
      - Graphics3D -
```



(a)



(b)

图 2-9-2

例 2.9.5 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程。

求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$。

```
In[]:=Clear[x, y, z, p];
    p = {x -> 1, y[x] -> -2, z[x] -> 1};
    t = Solve[{D[x^2 + y[x]^2 + z[x]^2 == 6, x],
          D[x + y[x] + z[x] == 0, x]}, {y'[x], z'[x]}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y'[x]\to-\frac{x-z[x]}{y[x]-z[x]},\ z'[x]\to-\frac{-x+y[x]}{y[x]-z[x]}\right\}\right\}$$

求切线的方向向量 $\boldsymbol{e}$：

```
In[]:=Clear[e, a];
    e = Array[a, 3];
    a[1] = 1; a[2] = t[[1, 1]] /. p; a[3] = t[[1, 2]] /. p;
    e
Out[]=
    {1, y'[1] → 0, z'[1] → -1}
```

求切线方程：

```
In[]:=f = {x - 1, y + 2, z - 1};f/e
Out[]=
```

$$\left\{-1+x,\ \frac{2+y}{y'[1]\to 0},\ \frac{-1+z}{z'[1]\to -1}\right\}$$

求法平面方程：

```
In[]:={1, 0, -1}.f == 0
```

Out[]=

```
x - z == 0
```

即法平面方程为 $x-z=0$，切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$。

例 2.9.6 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在 (1,2,3) 处的切平面及法线方程。

先求出曲面在点 (1,2,3) 处切平面的法向量：

```
In[]:=Clear[p, n, F, f];
    F[x_, y_, z_] := x^2 + y^2 + z^2 - 14;
    p = {x -> 1, y -> 2, z -> 3};
    n = Array[m, 3];
    m[1] = D[F[x, y, z], x] /. p; m[2] = D[F[x, y, z], y] /. p;
    m[3] = D[F[x, y, z], z] /. p;
    n
Out[]=
    {2, 4, 6}
```

再求切平面方程：

```
In[]:=f = {x - 1, y - 2, z - 3};
    n.f == 0;
    Simplify[%]
Out[]=
    -28 + 2 x + 4 y + 6 z == 0
```

最后求法线方程：

```
In[]:=f/n
Out[]=
```

$$\left\{\frac{1}{2}(-1+x),\ \frac{1}{4}(-2+y),\ \frac{1}{6}(-3+z)\right\}$$

即切平面方程为 $x+2y+3z-14=0$，法线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$。

下面画出曲面及其切平面和法线的图形，如图 2-9-3。

```
In[]:=Clear[t1, t2, t3, t4];
    t1 = ParametricPlot3D[{Sqrt[14] Cos[t] Sin[s], Sqrt[14]Sin[t]Sin[s],
            Sqrt[14]Cos[s]}, {t, 0, 2Pi}, {s, 0, Pi}];
    t2 = ParametricPlot3D[{1 + t, 2 + 2t, 3 + 3t}, {t, -1, 1}];
    t3 = ParametricPlot3D[{x, y, (14 - x - 2y)/3}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
    t4 = Graphics3D[{RGBColor[1, 0, 0], Point[{1, 2, 3}]}];
    Show[t1, t2, t3, t4, PlotRange -> {-5, 5},
        ViewPoint -> {3.284, -1.302, 1.117}]
Out[]=
```

- Graphics3D -

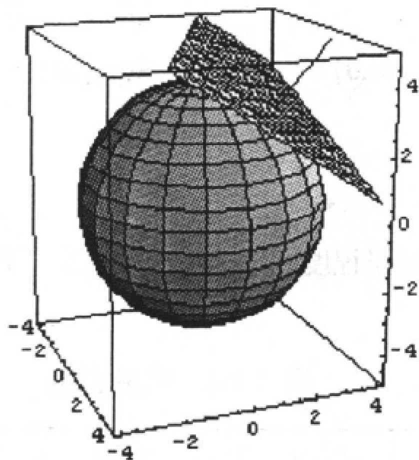


图 2-9-3

例 2.9.7 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a。

先求曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面在各坐标轴上的截距：

```
In[]:=Clear[x, y, z, F, n, b1, b2, b3, a];
    F[x_, y_, z_] := Sqrt[x] + Sqrt[y] + Sqrt[z] - Sqrt[a];
    p = {x -> x0, y -> y0, z -> z0};
    n = Array[a, 3];
    a[1] = D[F[x, y, z], x] /. p;
    a[2] = D[F[x, y, z], y] /. p;
    a[3] = D[F[x, y, z], z] /. p;
    eq = {{x - x0, y - y0, z - z0}.n == 0};
    b1 = Solve[eq /. {y -> 0, z -> 0}, x]
    b2 = Solve[eq /. {x -> 0, y -> 0}, z]
    b3 = Solve[eq /. {x -> 0, z -> 0}, y]
Out[]=
    {{x→ √x0 (√x0 + √y0 + √z0)}}
    {{z→ (√x0 + √y0 + √z0) √z0}}
    {{y→ √y0 (√x0 + √y0 + √z0)}}
```

即在 x 轴上的截距为 $\sqrt{x_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})$，在 y 轴上的截距为 $\sqrt{y_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})$，在 z 轴上的截距为 $\sqrt{z_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})$。

```
In[]:=x = Sqrt[x0]*(Sqrt[x0] + Sqrt[y0] + Sqrt[z0]);
    y = Sqrt[y0]*(Sqrt[x0] + Sqrt[y0] + Sqrt[z0]);
    z = (Sqrt[x0] + Sqrt[y0] + Sqrt[z0])*Sqrt[z0];x + y + z
Out[]=
```

$$\sqrt{x0}\ (\sqrt{x0}+\sqrt{y0}+\sqrt{z0})+$$
$$\sqrt{y0}\ (\sqrt{x0}+\sqrt{y0}+\sqrt{z0})+(\sqrt{x0}+\sqrt{y0}+\sqrt{z0})\sqrt{z0}$$

```
In[]:=Simplify[%] /. Sqrt[x0] + Sqrt[y0] + Sqrt[z0] -> Sqrt[a]
Out[]=
    a
```

即得切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a 。

例 2.9.8 为了测定刀具的磨损程度，每隔 1 小时（h），测量一次刀具的厚度，得到一组实验数据如表 2-9-1 所示。

表 2-9-1 实验数据

序号 i	0	1	2	3	4	5	6	7
时间 t_i /h	0	1	2	3	4	5	6	7
刀具厚度 y_i/mm	27.0	26.8	26.5	26.3	26.1	25.7	25.3	24.8

试根据上面的实验数据建立 y 和 t 之间的经验公式 $y=f(t)$ 。

先画出数据的散点图，如图 2-9-4 所示：

```
In[]:=a = {{0, 27}, {1, 26.8}, {2, 26.5}, {3, 26.3}, {4, 26.1},
          {5, 25.7}, {6,25.3}, {7, 24.8}};
      b = ListPlot[a, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[1, 0, 0]}];
Out[]=
      - Graphics -
```

用直线 $y=a_0+a_1x$ 进行拟合：

```
In[]:=Fit[a, {1, x}, x]
Out[]=
      27.125 - 0.303571 x
```

画出拟合图形，如图 2-9-5 所示：

```
In[]:=c = Plot[%, {x, 0, 7}, DisplayFunction -> Identity];Show[b, c]
Out[]=
      - Graphics -
```

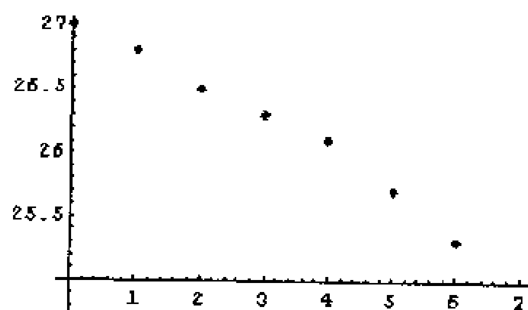


图 2-9-4

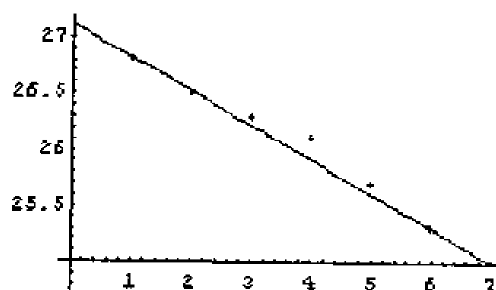


图 2-9-5

计算误差 M :

```
In[]:=Sum[(a[[i, 2]] -27.125 + 0.303571 a[[i, 1]])^2, {i, 1, 8}]
Out[]=
      0.108214
```

用二次多项式拟合:

```
In[]:=Fit[a, {1, x, x^2}, x]
Out[]=
      26.9625 - 0.141071 x - 0.0232143 x^2
```

画出拟合图形，如图 2-9-6 所示:

```
In[]:=c = Plot[%, {x, 0, 7}, DisplayFunction -> Identity];Show[b, c]
Out[]=
      - Graphics -
```

计算误差 M :

```
In[]:=Sum[(a[[i, 2]] - 26.9625+ 0.141071*a[[i, 1]] +
           0.0232143*a[[i, 1]]^2)^2 , {i, 1, 8}]
Out[]=
      0.0176786
```

用三次多项式拟合:

```
In[]:=Fit[a, {1, x, x^2, x^3}, x]
Out[]=
      27.0076 - 0.259127 x + 0.0218615 x^2 - 0.00429293 x^3
```

画出拟和图形，如图 2-9-7 所示:

```
In[]:=c = Plot[%, {x, 0, 7}, DisplayFunction -> Identity];
      Show[b, c]
Out[]=
      - Graphics -
```

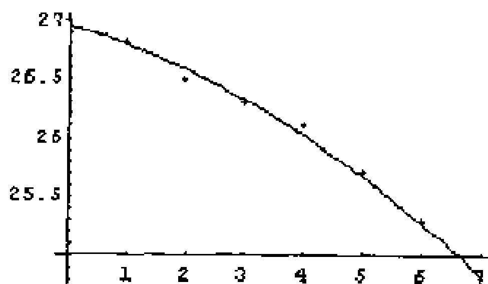


图 2-9-6

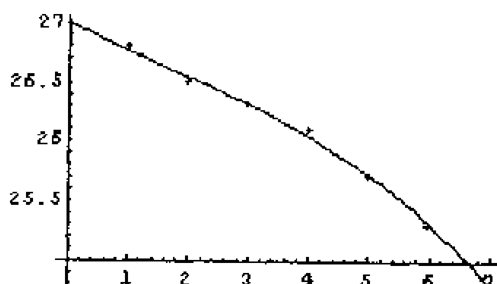


图 2-9-7

计算误差 M :

```
In[]:=Sum[(a[[i, 2]] - 27.0076 + 0.259127 *a[[i, 1]] -
          0.0218615 *a[[i, 1]]^2 + 0.00429293 *a[[i, 1]]^3)^2, {i, 1, 8}]
```

Out[]=

0.00673161

我们从图形和数据都可以看出，用三次多项式拟和误差最小，用直线拟和误差最大。

例 2.9.9 在研究某单分子化学反应速度时，得到如表 2-9-2 所示的数据。

表 2-9-2 实验数据

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	3	6	9	12	15	18	21	24
y_i	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

其中 x 表示从实验开始算起的时间，y 表示时刻 x 反应物的量。

试根据上述数据确定经验公式 $y=f(x)$。

先观察散点图，如图 2-9-8 所示：

```
In[]:=a = {{3, 57.6}, {6, 41.9}, {9, 31.0}, {12, 22.7}, {15, 16.6},
        {18, 12.2}, {21, 8.9}, {24, 6.5}};
     b = ListPlot[a, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[0, 0, 1]}]
Out[]=
     - Graphics -
```

由化学反应速度的理论知道，$y=f(x)$ 应是指数函数：$y=ke^{mx}$（k,m 是常数），则 $\ln y=\ln k+mx$ 是 x 的线性函数，因而数据点 $(x_i,\ln y_i)$ 的拟合函数是线性函数。

观察数据点 $(x_i,\ln y_i)$ 的散点图，如图 2-9-9 所示：

```
In[]:=a1 = Table[{a[[i, 1]], Log[a[[i, 2]]]}, {i, 1, 8}];
     b1 = ListPlot[a1, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[1, 0, 0]}];
Out[]=
     - Graphics -
```

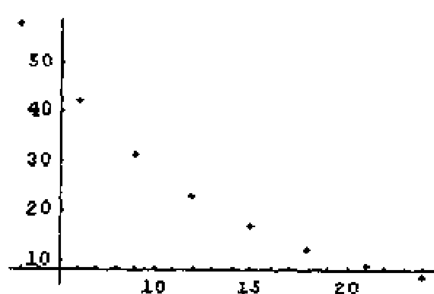


图 2-9-8

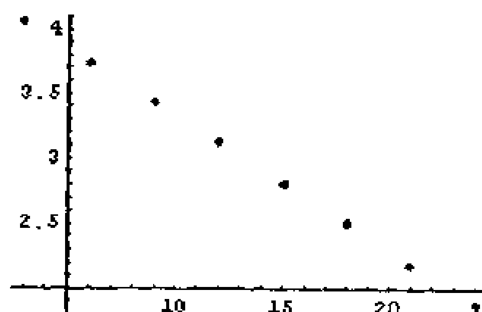


图 2-9-9

可以看出数据点大致在一条直线上，下面求拟合函数，画出拟合图形（如图 2-9-10 所示）并显示经验公式。

```
In[]:=n = Fit[a1, {1, x}, x];
    c1 = Plot[%, {x, 0, 25}, DisplayFunction -> Identity];Show[b1, c1];E^n
Out[]=
    4.36399 - 0.103686 x
Out[]=
    e^(4.36399-0.103686 x)                （*经验公式*）
```

最后我们看经验公式与原数据点的拟合情况，如图 2-9-11 所示。

```
In[]:=b = ListPlot[a, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[0, 0, 1]}];
    c = Plot[E^(4.36399 - 0.103686x), {x, 0, 25}];
    Show[b, c]
Out[]=
    - Graphics -
```

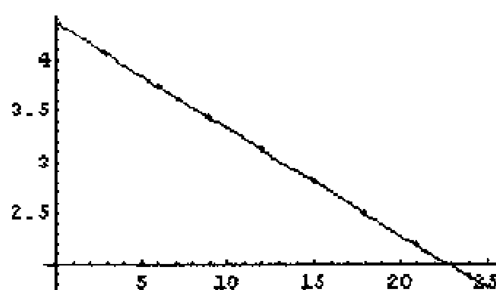


图 2-9-10

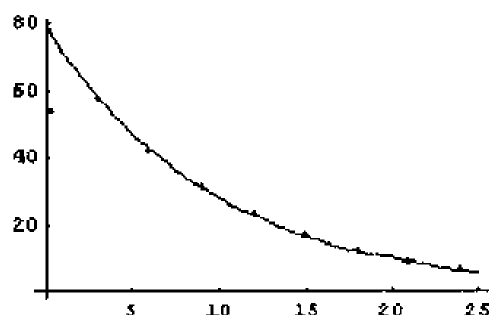


图 2-9-11

实验内容

练习 1　求函数 $f(x,y)=10x^2y-5x^2-4y^2-x^4-2y^4$ 的极值，画出函数的图形，并指出图形的最高点。

练习 2　求 $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ 在矩形域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 3,0\le y\le 2\}$ 上的最大值和最小值。

练习 3　用一块面积为 12m^2 的木板制作一个无盖的长方体盒子，求盒子的最大容积。

练习 4　求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

练习 5　求函数 $f(x,y,z)=x+2y+3z$ 在平面 $x-y+z=1$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上的最大值。

练习 6　求曲线$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$，在点$(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$处的切线及法平面方程。

练习 7　利用计算机求出下列曲面在指定点的切平面和法线，并画出图形。

（1）曲面$\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=3$在点$P(-2,1,-3)$处;

（2）曲面$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$M(1,1,\dfrac{\pi}{4})$处。

练习 8　利用计算机证明: 曲面$x+2y-\ln z+4=0$与曲面$x^2-xy-8x+z+5=0$在点$(2,-3,1)$处相切（即有公共切平面）。

练习 9　对如表 2-9-3 所示的数据做 1 次，2 次，3 次和 4 次多项式拟合，并作图考察拟合结果。

表 2-9-3　实验数据

x	0	0.2	0.52	0.64	0.7	1.0	1.15	0.3
y	0.3	0.45	0.50	0.38	0.33	0.40	0.39	0.47

实验 2-10　重积分及其应用

实验目的

1. 掌握用 Mathematica 计算重积分的方法。
2. 会用 Mathematica 计算立体的体积、曲面的面积等应用问题。

实验的基本理论与方法

1. 二重积分的直角坐标计算法：

(1) 若 $D=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 若 $D=\{(x,y): c\le y\le d, x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

2. 二重积分的极坐标计算法：若 $D=\{(r,\theta):\theta_1\le\theta\le\theta_2, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$，则

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

3. 曲顶柱体的体积：以曲面 $z=f(x,y)\ge 0$ 为顶，D 为底的曲顶柱体的体积：

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. 曲面的面积：设曲面 S 由 $z=f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 XOY 面上的投影区域，则曲面 S 的面积

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5. 平面薄片质量和重心坐标：平面薄片占 XOY 面上的闭区域 D，面密度为 $\rho(x,y)$，则

（1）D 的质量：$M=\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

（2）D 的重心坐标：$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$。

（3） D 的形心坐标：$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} x\mathrm{d}\sigma$， $\bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} y\mathrm{d}\sigma$ 。

6. 球面坐标、柱面坐标与直角坐标的关系：

直角坐标与柱面坐标的关系：$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi,-\infty\le z\le+\infty)$ 。

直角坐标与球面坐标的关系：$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$ $(0\le\theta<2\pi,0\le\varphi\le\pi)$ 。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,a,b}]**：作二维参数方程的图形。
2. **Plot3D[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]**：作 $z=f(x,y)$ 的图形。
3. **ParametricPlot3D[{x[u,v],y[u,v],z[u,v]},{u,a,b},{v,c,d}]**：作三维参数方程的图形。
4. **Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,y1,y2}]**：计算累次积分。

实验指导

例 2.10.1 求 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}xy\mathrm{d}y$ 。

```
In[]:=Integrate[x y,{x,1,2},{y,2-x,Sqrt[2x-x^2]}]
Out[]=
        1
        -
        4
```

例 2.10.2 求 $\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由直线 $x=2,y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域。

首先画出积分区域 D 的图形，如图 2-10-1 所示。

```
In[]:=a = ParametricPlot[{2, y}, {y, 0, 3}, DisplayFunction -> Identity];
        b = Plot[{y = x, y = 1/x}, {x, 0.1, 3}, PlotRange -> {0, 3},
              AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> Identity];
      Show[a, b, PlotRange -> {0, 2.5}, AspectRatio -> Automatic,
           DisplayFunction -> $DisplayFunction]
Out[]=
   - Graphics -
```

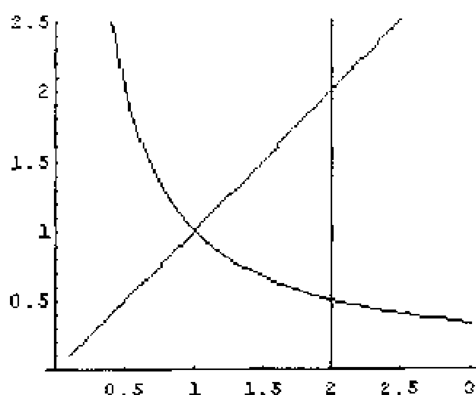


图 2-10-1

再求出 D 的边界曲线的交点：

```
In[]:=Solve[{x-2==0,y-x==0},{x,y}]
Out[]=
    {{x→2, y→2}}
In[]:=Solve[{x-2==0, x*y-1==0},{x,y}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y\to\frac{1}{2},\ x\to 2\right\}\right\}$$

```
In[]:=Solve[{y-x==0, x*y-1==0},{x,y}]
Out[]=
    {{x→-1, y→-1}, {x→1, y→1}}
```

最后计算积分：

```
In[]:=Clear[y];
      Integrate[x^2/y^2,{x,1,2},{y,1/x,x}]
Out[]=
```

$$\frac{9}{4}$$

例 2.10.3 利用极坐标计算二次积分 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dy$。

画出积分区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$ 的图形，如图 2-10-2 所示。

```
In[]:=f1=Sqrt[1-x^2];f2=1-x;
      Plot[{f1,f2},{x,-1,2}, AspectRatio -> Automatic,
                              AxesLabel->{"x","y"}]
Out[]=
    - Graphics -
```

利用极坐标计算积分：

```
In[]:=Integrate[r^3, {t, 0, Pi/2}, {r, 1/(Cos[t] + Sin[t]), 1}]
Out[]=
```

$$-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}(-3+3\pi)$$

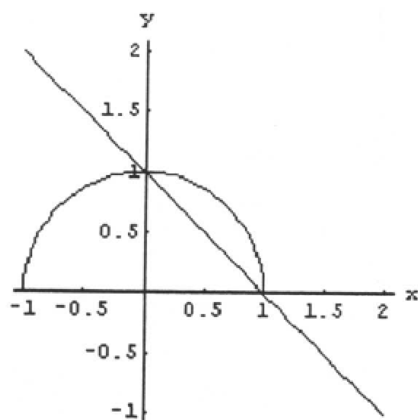


图 2-10-2

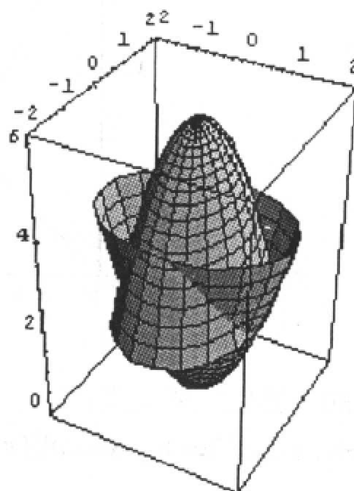


图 2-10-3

例 2.10.4 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积。

先画立体图形，如图 2-10-3 所示：

```
In[]:=Clear[t1, t2];
    t1=ParametricPlot3D[{u*Sin[v],u*Cos[v]/Sqrt[2],u^2},{u, 0, 2},{v, 0, 2Pi}];
    t2=ParametricPlot3D[{u*Sin[v]/Sqrt[2],u*Cos[v],6-u^2},{u,0,2},{v,0,2Pi}];
    Show[t1, t2]
Out[]=
    - Graphics3D -
```

再求出立体关于 XOY 面的投影柱面：

```
In[]:=z1=x^2+2y^2;
    z2=6-2x^2-y^2;
    Simplify[z2-z1==0]
Out[]=
```

$$0==3(-2+x^2+y^2)$$

由此结果可知，立体关于 XOY 坐标面的投影柱面为：$x^2+y^2=2$，投影区域为：

$$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2\}$$

最后计算立体的体积：

```
In[]:=x=r*Cos[t];
    y=r*Sin[t];
    v=Integrate[(z2-z1)*r,{t,0,2Pi},{r,0,Sqrt[2]}]
Out[]=
```

6π

例 2.10.5 求球面 $x^2+y^2+z^2=2^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 内的那部分的曲面面积。

先画出空间图形，如图 2-10-4 所示。

```
In[]:=r1=ParametricPlot3D[{2Sin[s]Cos[t],2Sin[s]Sin[t],2Cos[s]},{s,0,Pi},
                          { t,0,2Pi}];
      r2=ParametricPlot3D[{1+Cos[t],Sin[t],s},{s,-2,2},{t,0,2Pi}];
      Show[r1,r2]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

由题知立体关于 *XOY* 面的投影柱面为： $x^2+y^2=2x$ 。

再画出立体在 *XOY* 面的投影域，如图 2-10-5 所示。

```
In[]:=ParametricPlot[{1+Cos[t],Sin[t]},{t,0,2Pi},
                     AspectRatio->Automatic]
Out[]=
      - Graphics -
```

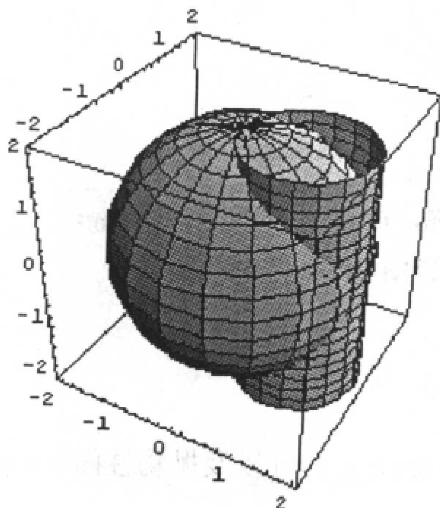


图 2-10-4

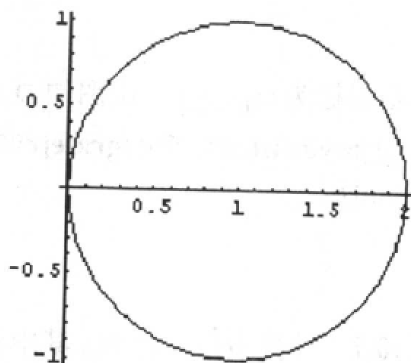


图 2-10-5

最后计算曲面面积：

```
In[]:=Clear[x,y,r,t];
      z=Sqrt[4-x^2-y^2];
      ds=Sqrt[1+D[z,x]^2+D[z,y]^2];
      x=r Cos[t];
      y=r Sin[t];
      Integrate[4ds*r,{t,0,Pi/2},{r,0,2Cos[t]}]
Out[]=
      4 (-4 + 2π)
```

例 2.10.6 求位于两圆 $r=2\sin t$ 和 $r=4\sin t$ 之间的均匀薄片 D 的重心。

首先画出 D 的图形，如图 2-10-6 所示。

```
In[]:=a=ParametricPlot[{2Sin[t]*Cos[t],2Sin[t]*Sin[t]},
                       {t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic];
      b=ParametricPlot[{4Sin[t]*Cos[t],4Sin[t]*Sin[t]},
                       {t,0,2Pi},AspectRatio->Automatic];
      Show[a,b,AspectRatio->Automatic]
Out[]=
    - Graphics -
```

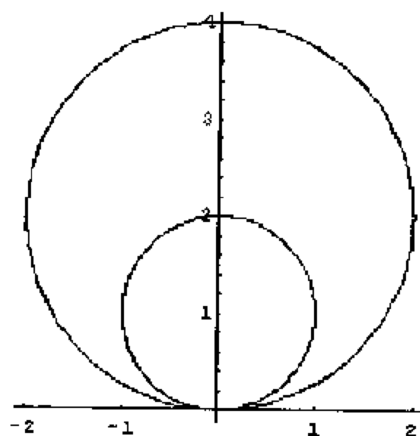


图 2-10-6

设重心坐标为 (x_0,y_0)，由图知 D 关于 y 轴对称，所以 $x_0=0$，下面求 y_0：

```
In[]:=y0=1/(3Pi)*Integrate[r^2*Sin[t],{t,0,Pi},{r,2Sin[t],4Sin[t]}]
Out[]=
    7
    -
    3
```

例 2.10.7 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

首先画出积分区域的图形，如图 2-10-7 所示。

```
In[]:=Clear[x,y,u,v,t1,t2,t3,t4];
      t1=Plot3D[0,{x,-1,1},{y,0,1}];
      t2=Plot3D[y,{x,-1,1},{y,0,1}];
      t3=ParametricPlot3D[{u,1,v},{u,-1,1},{v,0,1}];
      t4=ParametricPlot3D[{u,u^2,v},{u,-1,1},{v,0,1}];
      Show[t1,t2,t3,t4,ViewPoint->{2,1,1},AxesLabel->{"x","y","z"}]
Out[]=
    - Graphics3D -
```

再画出在 XOY 平面上的投影区域的图形，如图 2-10-8 所示。

```
In[]:=Plot[{1,x^2},{x,-2,2}]
Out[]=
    - Graphics -
```

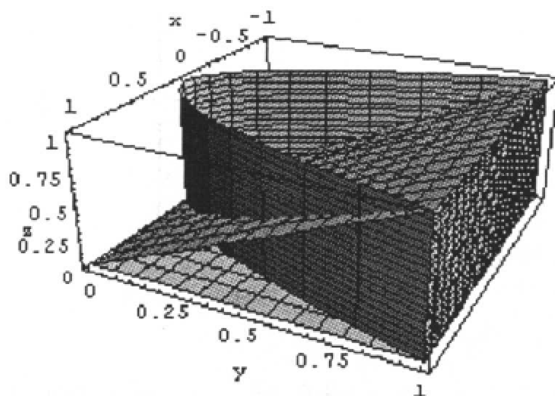


图 2-10-7

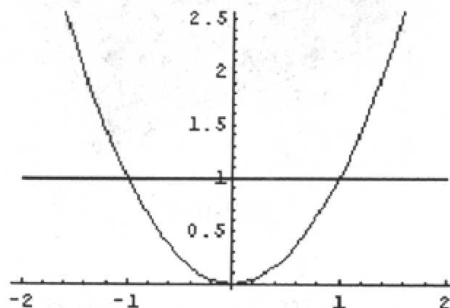


图 2-10-8

最后求积分：

```
In[]:=Integrate[x*z,{x,-1,1},{y,x^2,1},{z,0,y}]
Out[]=
    0
```

例 2.10.8 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域。

首先画出积分区域的图形，如图 2-10-9 所示。

```
In[]:=a1=Plot3D[x*y,{x,0,1.2},{y,0,1.2}];
      a2=ParametricPlot3D[{x,x,u},{x,0,1.2},{u,0,1.2}];
      a3=ParametricPlot3D[{1,y,z},{z,0,1.2},{y,0,1.2}];
      a4=Plot3D[0,{x,0,1.2},{y,0,1.2}];
      Show[a1,a2,a3,a4,AxesLabel->{"x","y","z"}]
Out[]=
    - Graphics3D -
```

再画出投影区域的图形，如图 2-10-10 所示。

```
In[]:=a1=Plot[x,{x,-2,2}];b1=ParametricPlot[{1,y},{y,-2,2}];
      Show[a1,b1]
Out[]=
    - Graphics -
```

最后计算三重积分：

```
In[]:=Clear[x,y,z];
      Integrate[x*y^2*z^3,{x,0,1},{y,0,x},{z,0,x y}]
Out[]=
```

$$\frac{1}{364}$$

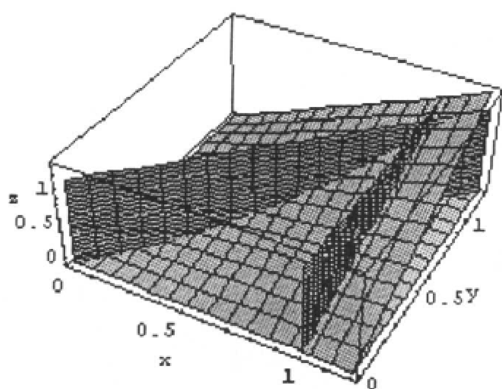


图 2-10-9

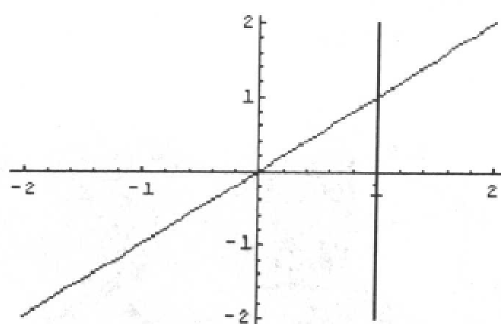


图 2-10-10

例 2.10.9 求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是两个球 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz \quad (R>0)$ 的公共部分。

画出积分区域的图形，如图 2-10-11 所示。

```
In[]:=r=1;
      d1=ParametricPlot3D[{r*Sin[u]*Cos[v],r*Sin[u]*Sin[v],
                            r*Cos[u]},{v,0,2Pi},{u,0,Pi/2}]
      d2=ParametricPlot3D[{r*Sin[u]*Cos[v],r*Sin[u]*Sin[v],
                            r*Cos[u]+1},{v,0,2Pi},{u,Pi/2,Pi}]
      Show[d1,d2]
Out[]=
      - Graphics3D -
```

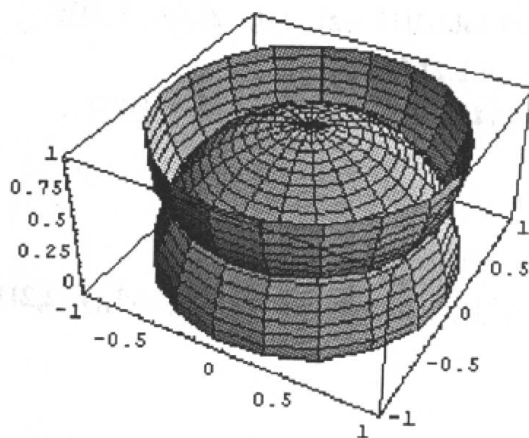


图 2-10-11

用球面坐标计算积分：

```
In[]:=x=r Sin[t2] Cos[t1];y=r Sin[t2] Sin[t1];z=r Cos[t2];
     a2=Integrate[z^2*r^2*Sin[t2],{t1,0,2Pi},{t2,0,Pi/3},{r,0,a}];
     b2=Integrate[z^2*r^2*Sin[t2],{t1,0,2Pi},{t2,Pi/3,Pi/2},{r,0,2a*Cos[t2]}];
     a2+b2
```

Out[]=

$$\frac{59\,a^5\,\pi}{480}$$

实验内容

练习 1　计算二次积分。

（1）$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}4\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r$；

（2）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}z$。

练习 2　计算二重积分。

（1）$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D:1\le x\le 2, x\le y\le 2x$；

（2）$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，　$D:x^2+y^2\le x$。

练习 3　求下面曲面所围成立体的体积。

（1）$z=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}, z=0, x^2+y^2=R^2$；

（2）$z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$。

练习 4　求曲面 $z^2=2xy$ 被平面 $x+y=1, x=0, y=0$ 所截的在第一卦限内的部分曲面的面积。

练习 5　设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 所围成，面密度为 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的重心。

练习 6　计算下列三重积分。

（1）计算 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}v, \Omega: x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$，$x^2+y^2\le z^2$；

（2）$\iiint\limits_\Omega xy\mathrm{d}v$，$\Omega$ 由 $x^2+y^2=1$，$z=1$，$z=0$，$x=0$，$y=0$ 围成；

（3）$\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v$,，$\Omega$ 由 $x^2+y^2+z^2=z$ 围成；

（4）$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，$\Omega$ 由 $4z^2=25(x^2+y^2)$，$z=5$ 围成。

实验 2-11　曲线积分与曲面积分

实验目的

掌握用 Mathematica 计算曲线与曲面积分的方法。

实验的基本理论与方法

1. 第一类曲线积分的概念及其计算方法：若函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，（$\alpha \le t \le \beta$）且 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，$x'^2(t)+y'^2(t) \ne 0$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

2. 第二类曲线积分的概念及其计算方法（略）。
3. 若平面区域 D 的面积为 A，边界曲线为 L，则有

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

4. 定理（Green 公式）：设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 及其一阶偏导数在区域 D 上连续，则公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

成立，其中 L 是区域 D 的边界，它是分段光滑的，方向取正向。

5. 平面曲线积分与路径无关的条件（略）。
6. 两类曲面积分的概念及其计算方法（略）。
7. Gauss 公式（略）。
8. Stokes 公式（略）。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **D[f[x,y],x]**：求偏导数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$。
2. **Integrate[f,{x,a,b}]**：求定积分。
3. **Integrate[f,{x,a,b},{y,c,d}]**：求累次积分。
4. **Plot[f,{x,a,b}]**：画一元函数的图形。
5. **ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t, a,b}]**：画二维参数图形。
6. **Show[f1,f2,f3]**：将图形 f_1, f_2, f_3 组合后重新输出。

实验指导

例 2.11.1 计算曲线积分 $\int_L y\mathrm{d}s$，其中 L 为心形线 $r=a(1+\cos t)$ 的下半部分。

心形线的参数方程为 $\begin{cases}x=a(1+\cos t)\cos t\\ y=a(1+\cos t)\sin t\end{cases}$ （$\pi\le t\le 2\pi$）。

```
In[]:=r[t_]:=a*(1+Cos[t]);
     y[t_]:= a*(1+Cos[t])*Sin[t];
     dr[t_]:=D[r[t],t];
     Integrate[y[t]*Sqrt[r[t]^2+dr[t]^2],{t,Pi,2Pi}]
Out[]=
```

$$-\frac{16}{5}a\sqrt{a^2}$$

例 2.11.2 计算曲线积分 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第 I 象限内所围成的扇形的整个边界。

取 $a=1$ 画出曲线的图形，如图 2-11-1 所示。

```
In[]:=f1=ParametricPlot[{x=Cos[t],y=Sin[t]},{t,0,Pi/4},AspectRatio->
                 Automatic,PlotStyle->{RGBColor[0,1,1], Thickness[0.001]}];
     f2=Plot[{x},{x, 0,2},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1], Dashing[{0.05,0.05}]}];
     f3=Plot[{0},{x, 0,2},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]}];
     Show[f1,f2,f3]
Out[]=
     - Graphics -
```

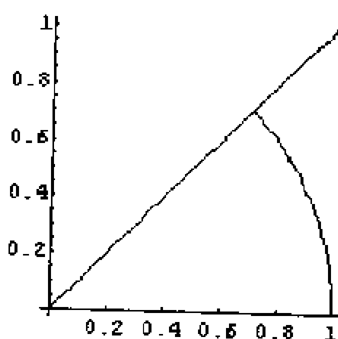


图 2-11-1

由图知：$L=l_1\cup l_2\cup l_3$，其中 l_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\quad (0\le t\le\frac{\pi}{4})$$

l_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad (0 \le t \le \frac{a}{\sqrt{2}})$$

l_3 的参数方程为

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$$

计算在 l_1 上的积分：

```
In[]:=x1[t_]:=a*Cos[t];
      y1[t_]:=a*Sin[t];
      dx1=D[x1[t],t];
      dy1=D[y1[t],t];
      s1[t_]:=Sqrt[dx1^2+dy1^2];
      I1= Integrate[Exp[Sqrt[x1[t]^2+y1[t]^2]]*s1[t],{t,0,Pi/4}]
Out[]=
```

$$\frac{1}{4}\sqrt{a^2}\, e^{\sqrt{a^2}}\, \pi$$

计算在 l_2 上的积分：

```
In[]:=x2[t_]:= t;
      y2[t_]:=t;
      dx2=D[x2[t],t];
      dy2=D[y2[t],t];
      s2[t_]:=Sqrt[dx2^2+dy2^2];
      I2= Integrate[Exp[Sqrt[x2[t]^2+y2[t]^2]]*s2[t],{t,0,a/Sqrt[2]}]
Out[]=
```

$$\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}\, a}+\frac{\sqrt{a^2}\, e^{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{2}\, a}\right)$$

计算在 l_3 上的积分：

```
In[]:=x3[t_]:=t;
      y3[t_]:=0;
      dx3=D[x3[t],t];
      dy3=D[y3[t],t];
      s3[t_]:=Sqrt[dx3^2+dy3^2];
      I3= Integrate[Exp[Sqrt[x3[t]^2+y3[t]^2]]*s3[t],{t,0,1}]
Out[]=
```

$$-1 + e$$

```
In[]:=I=I1+I2+I3
Out[]=
```

$$-1+e+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}\,a}+\frac{\sqrt{a^2}\,e^{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{2}\,a}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{a^2}\,e^{\sqrt{a^2}}\,\pi$$

例 2.11.3 计算曲线积分 $I=\oint_L (xy^2-4y^3)dx+(x^2y+\sin y)dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，且取正方向。

取 $a=1$，画出积分曲线，如图 2-11-2 所示。

```
In[]:=ParametricPlot[{x=Cos[t],y=Sin[t]},{t, 0,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[1,0,1],
                    Thickness[0.0.1]},AspectRatio->Automatic]
Out[]=
      - Graphics -
```

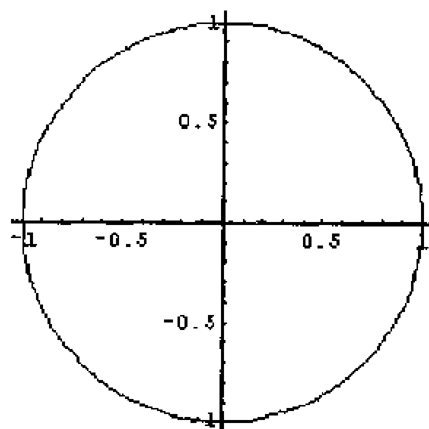


图 2-11-2

积分的计算方法有两种：

（1）直接计算。

```
In[]:=x[t_]:=a*Cos[t];
   y[t_]:=a*Sin[t];
   dx=D[x[t],t];
   dy=D[y[t],t];
   Integrate[(x[t]*y[t]^2-4*y[t]^3)*dx+
         (x[t]^2*y[t]+Sin[y[t]])*dy,{t,0,2Pi}]
Out[]=
   3 a^4 π
```

（2）利用 Green 公式。

```
In[]:=Clear[x, y, r, t];
   p[x_, y_] := x*y^2 - 4y^3;
   q[x_, y_] := x^2*y + Sin[y];
   d = (D[q[x, y], x] - D[p[x, y], y]) /. {x -> r*Cos[t], y -> r*Sin[t]};
   Integrate[d*r, {t, 0, 2Pi}, {r, 0, a}]
Out[]=
   3 a^4 π
```

例 2.11.4 利用曲线积分求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$（$0\le t\le 2\pi$）所围图形的面积。

取 $a=1$，画出曲线的图形，如图 2-11-3 所示。

```
In[]:=ParametricPlot[{(Cos[t])^3,(Sin[t])^3},{t,0,2Pi},
      AspectRatio->Automatic]
Out[]=
      - Graphics -
```

利用公式 $A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 计算面积：

```
In[]:=x[t_]:=a*Cos[t]^3;
      y[t_]:= a*Sin[t]^3;
      dx=D[x[t],t];
      dy=D[y[t],t];
      A[t_]:= x[t]*dy- y[t]*dx;
      A=Integrate[(1/2)*A[t],{t,0,2Pi}]
Out[]=
```

$$\frac{3a^2\pi}{8}$$

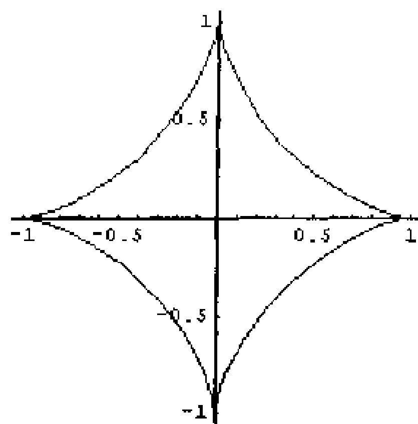


图 2-11-3

例 2.11.5 计算曲线积分 $\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一段。

判断曲线积分是否与路径无关：

```
In[]:=p[x_,y_]:=(x-y)/(x^2+y^2);
      q[x_,y_]:=(x+y)/(x^2+y^2);
      D[q[x,y],x]
Out[]=
```

$$-\frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}$$

```
In[]:=D[p[x,y],x]
Out[]=
```

$$-\frac{2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}$$

设 $D=\{(x,y)|x\neq 0且y>0\}$，则 D 是单连通域。由于 $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 和 $Q=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 以及它们的一阶偏导数在 D 内连续，且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，因此，积分在 D 内与路径无关，考虑到被积函数的特点，我们取上半圆周

$$C:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\quad t:0\to\pi$$

为新的积分路径，计算积分：

```
In[]:=x[t_]:=a*Cos[t];
      y[t_]:=a*Sin[t];
      dx=D[x[t],t];
      dy=D[y[t],t];
      Integrate[((x[t]-y[t]) *dx+(x[t]+ y[t])*dy)/(x[t]^2+y[t]^2),{t,0,Pi}]
```

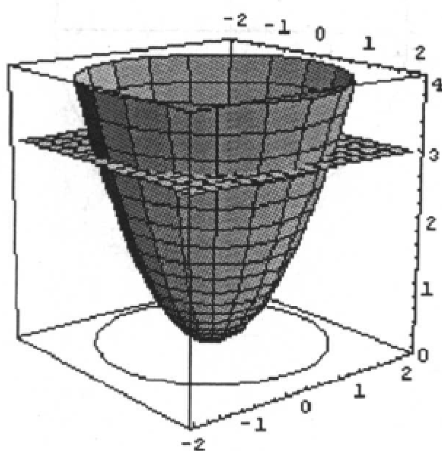
Out[]=

π

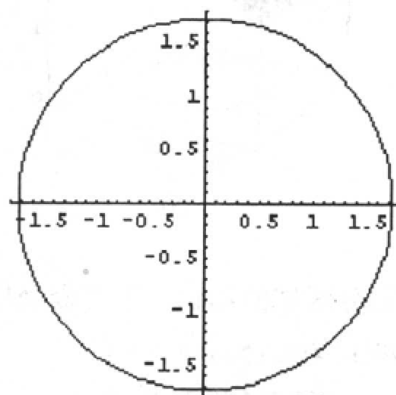
例 2.11.6 利用曲面积分计算旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ ($0\le z\le 3$)的面积。

画出曲面及其在 *XOY* 面的投影区域，如图 2-11-4 所示。

```
In[]:=Clear[t]
      g1 = ParametricPlot3D[{u*Cos[t], u*Sin[t], u^2}, {t, 0, 2Pi}, {u, 0, 2}];
      g2 = Plot3D[3, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}];
      g3 = ParametricPlot3D[{Sqrt[3]*Cos[t], Sqrt[3]*Sin[t], 0}, {t, 0, 2Pi}];
      Show[g1, g2, g3, ViewPoint -> {3.641, -3.012, 1.333}];
      ParametricPlot[{Sqrt[3]*Cos[t], Sqrt[3]*Sin[t]}, {t, 0, 2Pi},
                     AspectRatio -> Automatic]
Out[]=
      - Graphics -
```



(a)



(b)

图 2-11-4

根据被积函数和积分区域的特点，采用极坐标计算曲面面积：

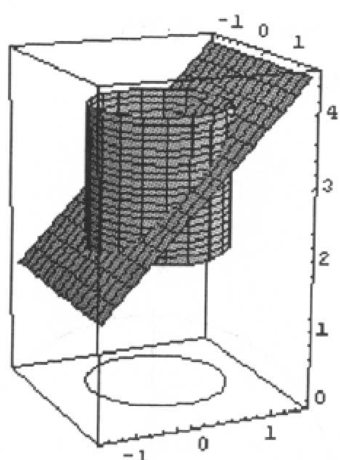
```
In[]:=Clear[r, x, y, z, t, s];
      z[x_, y_] := x^2 + y^2;
      s = Sqrt[1 + D[z[x, y], x]^2 + D[z[x, y], y]^2] /. {x -> r*Cos[t],
            y -> r*Sin[t]};
      Integrate[s*r, {t, 0, 2Pi}, {r, 0, Sqrt[3]}]
Out[]=
```

$$2\left(-\frac{1}{12}+\frac{13\sqrt{13}}{12}\right)\pi$$

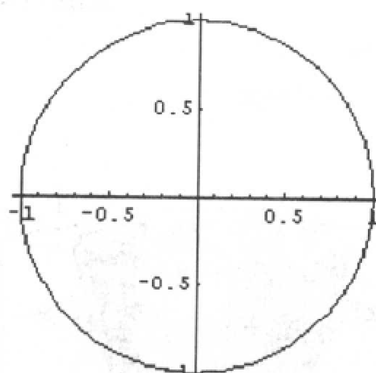
例 2.11.7 计算曲面积分 $\iint\limits_S yz\mathrm{d}S$，其中 S 是平面 $z=y+3$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截得的部分。

画出曲面及其在 *XOY* 面的投影区域，如图 2-11-5 所示。

```
In[]:=Clear[t1,t2,t3];
     t1=ParametricPlot3D[{Cos[t],Sin[t],u},{t,0,2Pi},{u,2,4}];
     t2= Plot3D[y+3,{x,-3/2,3/2},{ y,-3/2,3/2}];
     t3= ParametricPlot3D[{Cos[t],Sin[t],0},{t,0,2Pi}];
     Show[t1,t2,t3,ViewPoint->{4.276,-2.012,1.333}];
     ParametricPlot [{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2Pi},
                         AspectRatio->Automatic]
Out[]=
     - Graphics -
```



(a)



(b)

图 2-11-5

根据积分区域的形状，采用极坐标计算积分：

```
In[]:=z[x_, y_] := y + 3;
     dzx = D[z[x, y], x];
     dzy = D[z[x, y], y];
     sxy = y z[x, y] Sqrt[1 + dzx^2 + dzy^2] /. {x -> r*Cos[t], y -> r*Sin[t]};
     Integrate[sxy*r, {t, 0, 2Pi}, {r, 0, 1}]
Out[]=
```

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

例 2.11.8 利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为上半球体 $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的表面外侧。

```
In[]:=Clear[a];p[x_, y_, z_] := x*z^2;
     q[x_, y_, z_] := x^2*y - z^3;
     r[x_, y_, z_] := 2x*y + y^2*z;
```

```
dpx = D[p[x, y, z], x];
dqy = D[q[x, y, z], y];
drz = D[r[x, y, z], z];
f = dpx + dqy + drz
    /. {x -> t*Sin[u]*Cos[v], y -> t*Sin[u]*Sin[v], z -> t*Cos[u]};
Integrate[f*t^2*Sin[u], {v, 0, 2Pi}, {u, 0, Pi/2}, {t, 0, a}]
```

Out[]=

$$\frac{2a^5\pi}{5}$$

实验内容

练习 1　计算曲线积分 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 是圆心在 $(R,0)$，半径为 R 的上半圆周。

练习 2　利用曲线积分求椭圆 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ 所围图形的面积。

练习 3　计算曲线积分 $\oint(2xy-x^2)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y$，并验证 Green 公式的正确性，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成区域的正向边界线。

练习 4　计算曲面积分 $\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{z}$，$S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部。

练习 5　计算曲面积分 $\oiint\limits_S(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,z=3$ 所围成的空间闭区域的整个边界曲面的外侧。

实验 2-12　无穷级数

实验目的

1. 掌握用 Mathematica 判定常数项级数的敛散性的方法。
2. 掌握用 Mathematica 将函数展开为幂级数以及幂级数求和的方法。
3. 掌握用 Mathematica 将函数展开为 Fourier 级数的方法。

实验的基本理论与方法

1. 常数项级数的审敛法：

（1）级数收敛的必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

（2）比较审敛法的极限形式：设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$, $(0 < \rho < +\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或发散。

（3）比值审敛法：设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，当 $\rho < 1$ 时级数收敛；当 $\rho > 1$ 时级数发散。

（4）条件收敛与绝对收敛：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛（级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛），则称级数绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称级数条件收敛。

2. 幂级数展开的惟一性：若函数 $f(x)$ 在含点 x_0 的某一区间内能展为幂级数，则必为 Taylor 级数

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

3. 函数展开为 Fourier 级数：设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，满足 Dirichlet 收敛定理的条件，则 $f(x)$ 在连续点处可以展开为 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Series[f[x],{x,x0,n}]**：将 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开到 n 阶的泰勒公式。
2. **Normal[%]**：去掉展开式中的余项。
3. **Sum[A[n],{n,1,Infinity}]**：判断级数的收敛性并求级数的和。

实验指导

例 2.12.1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的收敛性。

```
In[]:=u[n_] := (-1)^(n - 1)/n;
      Sum[u[n], {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      Log[2]
```

即级数收敛于 $\ln 2$。

例 2.12.2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的收敛性。

```
In[]:=u[n_] := 1/(n*(n + 1))^(1/2);
      Sum[u[n], {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      Sum::div : Sum does not converge.
```

输出信息提示级数发散。

例 2.12.3 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$ 是否收敛，若收敛是绝对收敛还是条件收敛？

```
In[]:=u[n_] := 1/Log[n];
      Sum[u[n], {n, 2, Infinity}]
Out[]: =
      Sum::div : Sum does not converge.
In[]:=Clear[u]
      u[n_] :=(-1)^n/Log[n];
      NSum[u[n], {n, 2, Infinity}]
Out[]=
      0.9243
```

于是级数条件收敛。

例 2.12.4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ 是否收敛，若收敛是绝对收敛还是条件收敛。

```
In[]:=u[n_] := 2^n^2/n!;
      Sum[u[n], {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      Sum::div : Sum does not converge.
```

即绝对值级数发散。再考察级数本身是否收敛:

```
In[]:=Clear[u];
      u[n_] := (-1) ^(n-1) *2^n^2/n!;
      Sum[u[n], {n, 1, Infinity}]
Out[]: =
      Sum::div : Sum does not converge.
```

故级数发散。

例 2.12.5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n \cdot n}$ 的收敛区间及和函数。

先求收敛区间:

```
In[]:=u[n_]:=x^n/2^n/n;
        r = 1/Limit[u[n + 1]/u[n] /. x -> 1, n -> Infinity]
Out[]=
      2
```

考察 $x=-2$ 处是否收敛:

```
In[]:=Sum[u[n] /. x -> -2, {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      -Log[2]
```

考察 $x=2$ 处是否收敛:

```
In[]:=Sum[u[n] /. x -> 2, {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      Sum::div : Sum does not converge.
```

故幂级数的收敛区间为 $[-2,2)$ 。再求幂级数的和函数:

```
In[]:=Sum[u[n], {n, 1, Infinity}]
Out[]=
      -Log[1 - x/2]
```

故幂级数的和函数为 $-\ln(1-\frac{x}{2})$ 。

例 2.12.6 求下列幂级数的和函数。

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$ 。

```
In[]:=Sum[(2n - 1)/2^n*x^(2n - 2), {n, 1, Infinity}]
Out[]=
```

$$\frac{2x^2+x^4}{x^2(-2+x^2)^2}$$

（2）$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-1)^n$。

In[]:=**Sum[n*(x-1)^n, {n, 1, Infinity}]**

Out[]=

$$\frac{-1+x}{(-2+x)^2}$$

例 2.12.7　（1）将 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 展开为 x 的幂级数；

（2）将 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数。

In[]:=**Normal[Series[Log[x+Sqrt[x^2+1]],{x,0,5}]]**

Out[]=

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}$$

In[]:=**Normal[Series[1/(x^2+3x+2),{x,1,3}]]**

Out[]=

$$\frac{1}{6}-\frac{5}{36}(-1+x)+\frac{19}{216}(-1+x)^2-\frac{65(-1+x)^3}{1296}$$

例 2.12.8　将 $\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数，并计算 $\ln 2$ 的近似值。

In[]:=**Series[Log[1+x],{x,0,5}];**

Normal[%]

Out[]=

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$$

我们用此幂级数来计算 $\ln 2$ 的近似值：

In[]:=**For[i=5,i<=30,i+=5,**

a=N[Normal[Series[Log[1+x],{x,0,i}]]/.x->1];

Print[i,"　　",a]]

Out[]=

```
5    0.783333
10   0.645635
15   0.725372
20   0.668771
25   0.712747
30   0.676758
```

为了便于比较，下面用级数

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\qquad(-1<x<1)$$

取 $x=\frac{1}{3}$ 来计算 ln 2 的近似值：

```
In[]:=Series[Log[(1+x)/(1-x)],{x,0,10}];
      Normal[%]
Out[]=
```

$$2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\frac{2x^9}{9}$$

```
In[]:=For[i=5,i<=30,i+=5,
       b=N[Normal[Series[Log[(1+x)/(1-x)],{x,0,i}]]/.x->1/3,10];
       Print[i,"     ",b]]
       N[Log[2],10]
Out[]=
        5    0.693004
        10   0.693146
        15   0.693147
        20   0.693147
        25   0.693147
        30   0.693147
```

下面画出两种方法的散点图如图 2-12-1 所示，并从图形上观察这两个幂级数收敛的快慢程度。

```
In[]:=a = Plot[Log[2] // N, {x, 2, 30}, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0]];
     b = ListPlot[ Table[Normal[Series[Log[1 + x], {x, 0, i}]] /. x -> 1, {i, 2, 30}],
                PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02]}];
     c = ListPlot[ Table[Normal[Series[Log[(1 + x)/(1 - x)], {x, 0, i}]] /. x -> 1/3,
                {i, 2, 30}], PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], PointSize[0.02]}];
  Show[a, b, c]
Out[]=
      - Graphics -
```

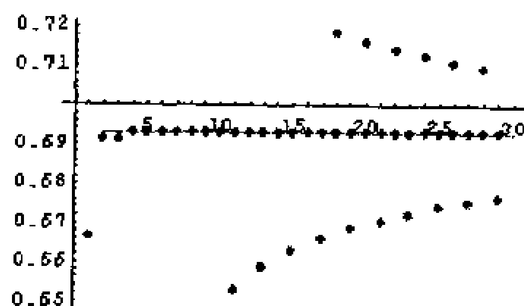


图 2-12-1

可以看到第二种方法的收敛速度是非常快的，因而在用幂级数作近似计算时选择适当的幂级数非常重要。

例 2.12.9 将 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 展开为 Fourier 级数。

```
In[]:=a0=1/Pi*Integrate[x,{x,-Pi,0}];
      a[n_]=1/Pi*Integrate[x*Cos[n*x],{x,-Pi,0}];
      b[n_]=1/Pi*Integrate[x*Sin[n*x],{x,-Pi,0}];
      g[x_]:=a0/2+Sum[a[n]*Cos[n*x]+b[n]*Sin[n*x],{n,1,5}];
      g[x]
Out[]=
```

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{2\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{Cos}[3x]}{9\pi}+\frac{2\,\mathrm{Cos}[5x]}{25\pi}+$$
$$\mathrm{Sin}[x]-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[2x]+\frac{1}{3}\mathrm{Sin}[3x]-\frac{1}{4}\mathrm{Sin}[4x]+\frac{1}{5}\mathrm{Sin}[5x]$$

例 2.12.10 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$分别展开为正弦级数和余弦级数。

展开为正弦级数：

```
In[]:=Clear[x,f,g,a,b];
      f[x_]:=x+1;
      b[n_]:=2/Pi*Integrate[f[x]*Sin[n*x],{x,0,Pi}];
      g[x_]:=Sum[b[n]*Sin[n*x],{n,1,5}];
      Simplify[g[x]]
Out[]:=
```

$$\frac{2\,(2+\pi)\,\mathrm{Sin}[x]}{\pi}-\mathrm{Sin}[2x]+$$
$$\frac{2\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{Sin}[3x]}{\pi}-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[4x]+\frac{2\left(\frac{2}{5}+\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{Sin}[5x]}{\pi}$$

展开为余弦级数：

```
In[]:=a0=2/Pi*Integrate[f[x],{x,0,Pi}];
      a[n_]:=2/Pi*Integrate[f[x]*Cos[n*x],{x,0,Pi}];
      h[x_]:=a0/2+Sum[a[n]*Cos[n*x],{n,1,5}];
      Simplify[h[x]]
Out[]=
```

$$1+\frac{\pi}{2}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[3x]}{9\pi}-\frac{4\,\mathrm{Cos}[5x]}{25\pi}$$

例 2.12.11 设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，在$[-2,2]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -2\le x<0 \\ k, & 0\le x<2 \end{cases} \qquad (k\ne 0)$$

将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数。

```
In[]:=a0=(1/2)*Integrate[k,{x,0,2}];
```

```
a[n_]:=(1/2)*Integrate[k*Cos[(n*Pi*x)/2],{x,0,2}];
b[n_]:=(1/2)*Integrate[k*Sin[(n*Pi*x)/2],{x,0,2}];
fx=a0/2+Sum[a[n]*Cos[(n*Pi*x)/2]+b[n]*Sin[(n*Pi*x)/2],{n,1,5}]
```

Out[]=

$$\frac{k}{2}+\frac{2\,k\,\mathrm{Sin}[\frac{\pi x}{2}]}{\pi}+\frac{2\,k\,\mathrm{Sin}[\frac{3\pi x}{2}]}{3\pi}+\frac{2\,k\,\mathrm{Sin}[\frac{5\pi x}{2}]}{5\pi}$$

实验内容

练习 1　用 **Sum[ ]**函数判断下列级数的收敛性。

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；　（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$；　（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n}{2}$。

练习 2　将下列函数展开成 x 的幂级数。

（1） $\ln(a+x)\ (a>0)$；　（2） a^x；

（3） $\sin^2 x$；　（4） $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$。

练习 3　将下列函数展开成幂级数。

（1） $\lg x$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数;

（2） $\cos x$ 展开成 $(x+\frac{\pi}{3})$ 的幂级数。

练习 4　将下列以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数:

（1） $f(x)=3x^2+1, -\pi\le x<\pi$；　（2） $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$。

练习 5　将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$展开为正弦级数和余弦级数。

练习 6　将函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0\\ 1, & 0\le x<3\end{cases}$ 展开为 Fourier 级数。

实验 2-13　微分方程

实验目的

掌握用 Mathematica 求微分方程的解的方法。

实验的基本理论与方法

1. 齐次方程的求解法。
2. 一阶线性微分方程的求解法。
3. 可降阶的高阶微分方程的求解法。
4. 二阶线性微分方程的求解法。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **DSolve[微分方程,y[x],x]**：求解微分方程。
2. **DSolve[{微分方程,初值条件},y[x],x]**：求微分方程的初值解。

实验指导

例 2.13.1　求解微分方程 $xy'-y\ln y=0$。

```
In[]:=DSolve[x y'[x]-y[x] Log[y[x]]==0,y[x],x]
Out[]=
```

$\{\{y[x] \to e^{x C[1]}\}\}$

例 2.13.2　求解微分方程 $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0$，$y|_{x=2}=1$。

```
In[]:=DSolve[{x y'[x]+2y[x]==0,y[2]==1},y[x],x]
Out[]=
```

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{4}{x^2}\right\}\right\}$

例 2.13.3　求解微分方程 $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$。

```
In[]:=DSolve[y'[x]-2y/(x+1)==(x+1)^(5/2),y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \sqrt{1+x}\left(\frac{2}{7}+\frac{6x}{7}+\frac{6x^2}{7}+\frac{2x^3}{7}\right)+C[1]+2y\,Log[1+x]\right\}\right\}$$

例 2.13.4 求解微分方程 $y'''=e^{2x}-\cos x$。

```
In[]:=DSolve[y'''[x]==E^(2x)-Cos[x],y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{e^{2x}}{8}+C[1]+x\,C[2]+x^2\,C[3]+Sin[x]\right\}\right\}$$

例 2.13.5 求解微分方程 $yy''-y'^2=0$。

```
In[]:=DSolve[y[x] y''[x]-y'[x]^2==0,y[x],x]
Out[]=
```

$$\{\{y[x] \to e^{C[1]\,(x-C[2])}\}\}$$

例 2.13.6 求解微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$。

```
In[]:=DSolve[y''''[x]-2y'''[x]+5y''[x] ==0,y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to C[3]+x\,C[4]+\frac{4}{25}e^{x}C[1]\,Cos[2x]-\frac{3}{25}e^{x}C[2]\,Cos[2x]+\frac{3}{25}e^{x}C[1]\,Sin[2x]+\frac{4}{25}e^{x}C[2]\,Sin[2x]\right\}\right\}$$

例 2.13.7 求解微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$。

```
In[]:=DSolve[y''[x]-5y'[x]+6y[x] ==x E^(2x),y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to e^{2x}(-1-x)-\frac{1}{2}e^{2x}x^2+e^{2x}C[1]+e^{3x}C[2]\right\}\right\}$$

例 2.13.8 求解微分方程 $y''+y=x\cos 2x$。

```
In[]:=DSolve[y''[x]+y[x] ==x Cos[2x],y[x],x];
    Simplify[%]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to C[2]\,Cos[x]-\frac{1}{3}x\,Cos[2x]-C[1]\,Sin[x]+\frac{4}{9}Sin[2x]\right\}\right\}$$

例 2.13.9 求微分方程 $y''-y=4xe^{x}$ 满足 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ 的特解。

```
In[]:=DSolve[{y''[x]-y[x] ==4x E^x,y[0] ==0,y'[0] ==1},y[x],x]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}e^{-x}(-2+2e^{2x}-2e^{2x}x+2e^{2x}x^2)\right\}\right\}$$

例 2.13.10 求解微分方程 $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$。

```
In[]:=DSolve[x^2 y''[x]-3x y'[x]+4y[x]==x+x^2 Log[x],y[x],x]
   Simplify[%]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{y[x]\to\frac{1}{6}x(6+6xC[1]+6xC[2]\,Log[x]+xLog[x]^3)\right\}\right\}$$

实验内容

练习 求解下列微分方程。

（1） $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$；

（2） $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$；

（3） $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$；

（4） $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$；

（5） $y''+2y'+5y=\sin 2x$；

（6） $y''+2y'+y=\cos x$，满足当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'=\frac{3}{2}$ 的特解；

（7） $x^3y'''+2xy'-2y=x^2\ln x+3x$。

第三篇　高等数学验证与演示实验

实验 3-1　由图形分析函数性质

实验目的

通过几何图形观察、分析函数的各种性质。

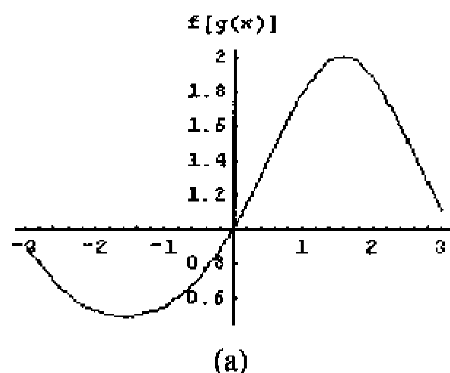
实验指导

例 3-1-1　设 $f(x)=2^x$， $g(x)=\sin x$，观察复合函数 $f[g(x)], g[f(x)]$ 的图形。

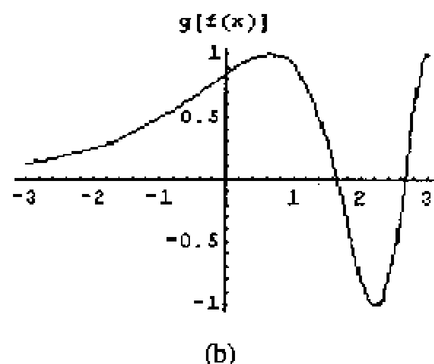
输入程序：

```
In[]:=Clear[x, f, g];
    f[x_] := 2^x;
    g[x_] := Sin[x];
    Plot[f[g[x]],{x, -3, 3}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0],
        AxesLabel -> "f[g(x)]"];
    Plot[g[f[x]],{x, -3, 3}, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1],
        AxesLabel -> "g[f(x)]"]
Out[]=
      - Graphics -
```

输出图形如图 3-1-1 所示。



(a)



(b)

图 3-1-1

例 3-1-2 画出指数函数 $y=a^x$ 当 $a=\mathrm{e}, a=\frac{1}{\mathrm{e}}, a=5, a=\frac{1}{5}$ 时的图形，观察指数函数的性质。

输入程序：

```
In[]:=Plot[{Exp[x], 1/Exp[x], 5^x, (1/5)^x}, {x, -1, 1},
            AspectRatio -> Automatic,
            AxesLabel -> {"x", "a=1/5,1/e,e,5"},
            PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0],
                          RGBColor[0, 0, 1]}]
Out[]=
      - Graphics -
```

输出图形如图 3-1-2 所示。

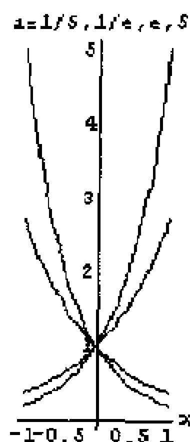


图 3-1-2

例 3-1-3 描绘正态分布密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$（其中 a,b 为常数）在下列情况时的图形：

（1）$a=0, b=1$，1.5，2，2.5；

（2）$b=1, a=0$，1，2，3。

观察 a,b 的变化对图形的影响。

（1）输入程序：

```
In[]:=Clear[a, b];
      f[x_] := 1/((2Pi)^(1/2)*b)*E^(-(x - a)^2/(2b^2));
      a = 0;
      Do[Plot[f[x], {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 0.5}, PlotLabel -> {"b", b}],
        {b, 1, 2.5, 0.5}]
Out[]=
      - Graphics -
```

输出图形如图 3-1-3 所示。

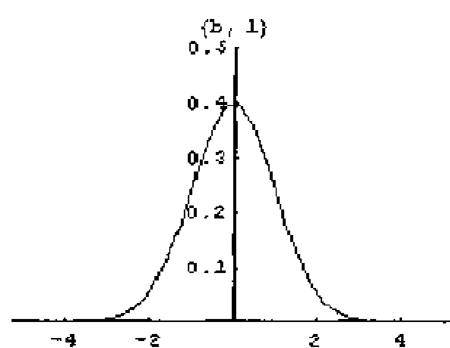
根据图形可得结论：随着 b 的增大，函数图形的最高点在逐渐降低。

（2）输入程序：

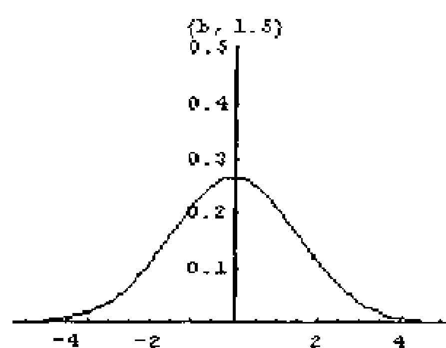
```
In[]:=Clear[a, b];
      f[x_] := 1/((2Pi)^(1/2)*b)*E^(-(x - a)^2/(2b^2));
      b = 1;
      Do[Plot[f[x], {x, -6, 6}, PlotRange -> {0, 0.5},
            PlotLabel -> {"a", a}], {a, 0, 3}]
Out[]=
      - Graphics -
```

输出图形如图 3-1-4 所示。

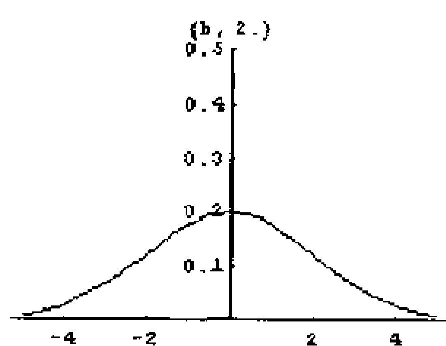
根据图形可得结论： 随着 a 的增大，函数的图形在向右移动。



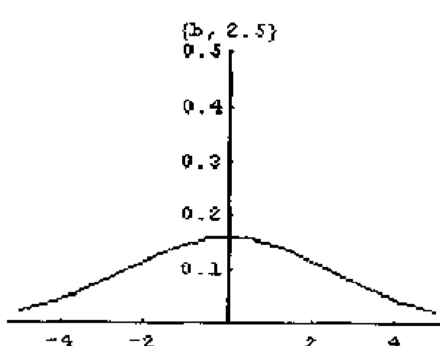
(a)



(b)

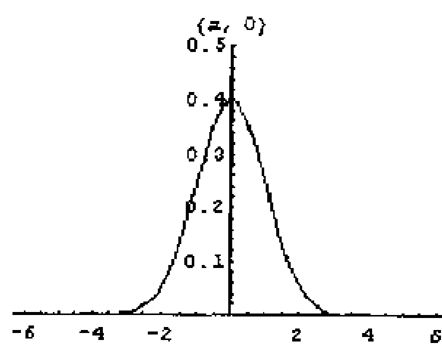


(c)

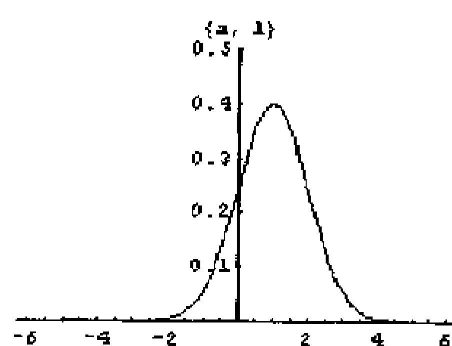


(d)

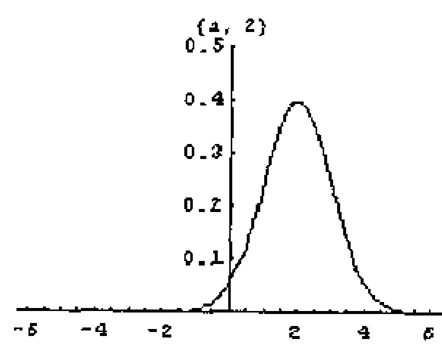
图 3-1-3



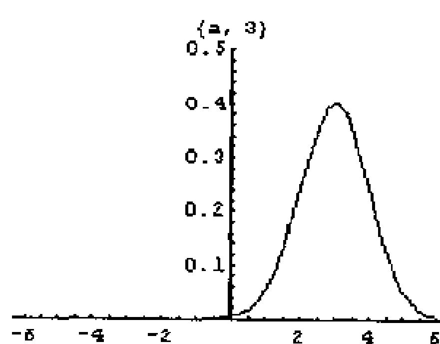
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3-1-4

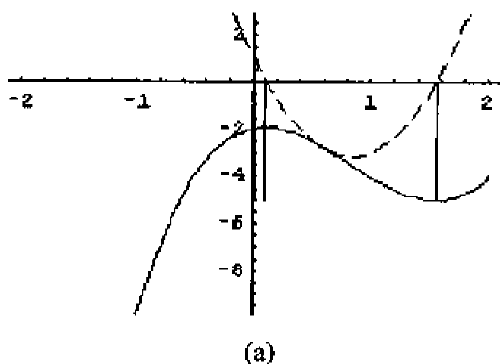
例 3-1-4 观察 $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ 的单调性、凹凸性与 $f'(x), f''(x)$ 符号的关系。

（1）先求出函数的驻点。

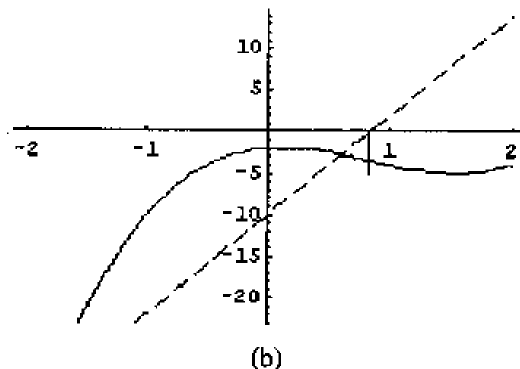
```
In[]:=Clear[f,t,a,b];
    f[x_] := 2x^3 - 5x^2 + x - 2;
    t = Solve[f'[x] == 0, x] // N
    x1 = x /. t[[1, 1]];
    x2 = x /. t[[2, 1]];
Out[]=
    {{x→ 0.10685}, {x→ 1.55982}}
```

（2）观察一阶导函数与函数的关系，其中虚线是一阶导函数的图形，如图 3-1-5（a）所示。

```
In[]:=a = Plot[{f[x], f'[x]}, {x, -2, 2},PlotStyle ->
              {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.03, 0.02}]}];
    b = Graphics[{Line[{{x1, -5}, {x1, 0}, {x2, 0}, {x2, -5}}]}];
    Show[a, b]
Out[]=
    - Graphics -
```



(a)



(b)

图 3-1-5

（3）求二阶导数为零的点。

```
In[]:=s = Solve[f''[x] == 0, x] // N;
    x3 = x /. s[[1, 1]]
    f[x3]
Out[]=
    {{x→ 0.833333}}
    -3.48148
```

（4）观察二阶导函数与函数的关系，其中虚线是二阶导函数的图形，如图 3-1-5（b）所示。

```
In[]:=c = Plot[{f[x], f''[x]}, {x, -2, 2},PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0],
              Dashing[{0.03, 0.02}]}];
```

```
d = Graphics[{Line[{{x3, -5}, {x3, 0}}]}];
Show[c, d]
Out[]=
   - Graphics -
```

据此可以得出，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0.10685],[1.55982,+\infty)$ 是单调增加的，在区间 $[0.10685,1.55982]$ 是单调减小的；$f(x)$ 的图形在区间 $(-\infty,0.833333]$ 是凸的，在区间 $[0.833333,+\infty)$ 是凹的，$(0.833333,-3.48148)$ 是拐点。

实验内容

练习 1　画出下列函数的图形并与 $y=\sin x$ 的图形进行比较，观察函数 $y=A_0+A\sin(ax+b)$ 中常数 A，a，b 的取值对函数图形的影响。

（1）$y=\frac{1}{2}+\sin x$；　　（2）$y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$；

（3）$y=3\sin x$；　　（4）$y=\sin 2x$；

（5）$y=3\sin(2x+\frac{2}{3}\pi)$。

练习 2　将函数 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$y=x+\frac{1}{x}$ 的图形画在一张图上进行比较，体会“叠加法”作图的思想。

练习 3　任意取 $a\ (a>0,a\neq 1)$ 值，画出 $y=a^x$ 的图形，并观察 a 的取值以及 x 的取值范围对函数单调性的影响。

练习 4　任意取 $a\ (a>0,a\neq 1)$ 值，画出函数 $y=a^x$ 的图形，分别观察当 $x\to+\infty$，和 $x\to-\infty$ 时函数值的变化趋势。

练习 5　画出 $y=\arctan x$ 的图形，观察函数的有界性，单调性。

练习 6　将 $y=\frac{\pi}{2}$，$y=-\frac{\pi}{2}$，$y=\arctan x$ 的图形画在一张图上，观察函数的有界性并进一步得出当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时函数的上界和下界。

练习 7　画出函数 $y=\arctan x$ 的图形，分别观察当 $x\to+\infty$，和 $x\to-\infty$ 时函数值的变化趋势。

练习 8　任意选择函数 $f(x)$，画出 $f(x),f'(x),f''(x)$ 的图形，通过图形观察 $f(x)$ 的单调性，凹凸性与 $f'(x),f''(x)$ 的符号的关系。

实验 3-2　函数与极限的概念

实验目的

1. 通过几何与数值两个方面观察理解极限的概念。
2. 通过几何与数值两个方面观察理解无穷大的概念以及无穷大量与无界函数的区别。
3. 通过几何与数值两个方面观察理解无穷小的阶及其比较。

实验指导

例 3-2-1　观察数列 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 与其极限值的接近程度。

（1）我们已经知道 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，下面从数值上观察 x_n 与常数 $A=0$ 无限接近的情况。

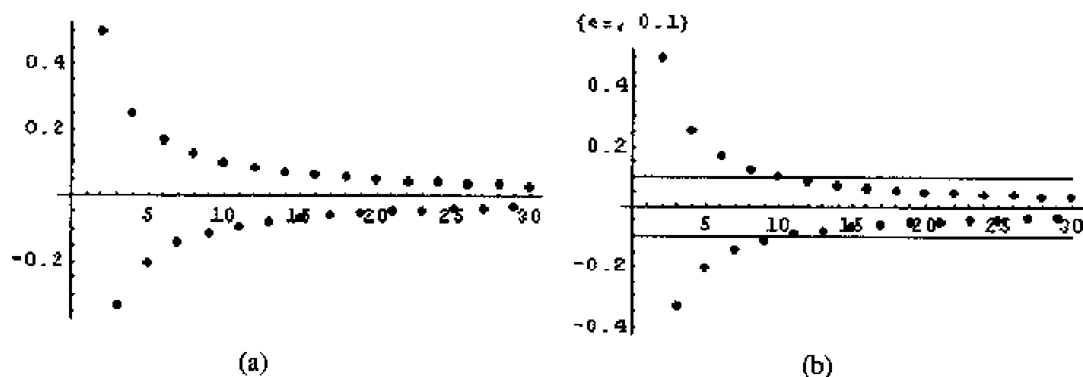
```
In[]:=n=15;A=0;
    For[i=1,i<=n,i++,
        xi=(-1)^i/i//N;    ri=Abs[xi-A]//N;
        Print[i,"          ",xi,"          ",ri]
        ]
Out[]=
    i       xi        ri
    1       -1.        1.
    2       0.5        0.5
    3       -0.333333        0.333333
    4       0.25        0.25
    5       -0.2        0.2
    6       0.166667        0.166667
    7       -0.142857        0.142857
    8       0.125        0.125
    9       -0.111111        0.111111
    10       0.1        0.1
    11       -0.0909091        0.0909091
    12       0.0833333        0.0833333
    13       -0.0769231        0.0769231
    14       0.0714286        0.0714286
    15       -0.0666667        0.0666667
```

由以上输出结果可见，随着n的增大，x_n越来越接近于0，$r_i=|x_i-A|$越来越接近0。

（2）下面再从几何上观察，随着n的增大x_n与常数0无限接近的情况。

```
In[]:=Clear[n, x];
    A = 0; e = 10^-1 // N;
    n1 = Table[(-1)^n/n, {n, 1, 30}] // N;
    a = ListPlot[n1, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02]}];
    b = Plot[{A - e, A + e}, {x, 0, 30}, DisplayFunction -> Identity];
    Show[a, b, AxesLabel -> {"", {"e=", e}}]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图3-2-1所示。



(a) (b)

图3-2-1

例3-2-2 观察当$x\to1$时，函数$y=\sqrt{x}$与其极限的接近程度。

（1）先求出数列的极限。

```
In[]:=Limit[x^(1/2),x->1]
Out[]=
    1
```

（2）再从图形上进行观察：

```
In[]:=Clear[f,x,g];
    e=0.1;x0=1;A=1;
    f[x_]:=x^(1/2);
    g0=Plot[f[x],{x,x0-1,x0+1},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}];
    g=Plot[{A-e,A,A+e},{x,x0-1,x0+1},PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],
            RGBColor[0,1,0]},DisplayFunction->Identity];
    rx1=FindRoot[f[x]==A-e,{x,0,2}];
    x1=x/.rx1;
    rx2=FindRoot[f[x]==A+e,{x,0,2}];
    x2=x/.rx2;
```

```
a1=x0-x1;a2=x2-x0;
a=If[a1<a2,a1,a2];
g1=ParametricPlot[{x=x0-a,y=t},{t,A-e,A+e},
                  DisplayFunction->Identity];
g2=ParametricPlot[{x=x0+a,y=t},{t,A-e,A+e},
                  DisplayFunction->Identity];
Show[g0,g,g1,g2]
```

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 3-2-2 所示。

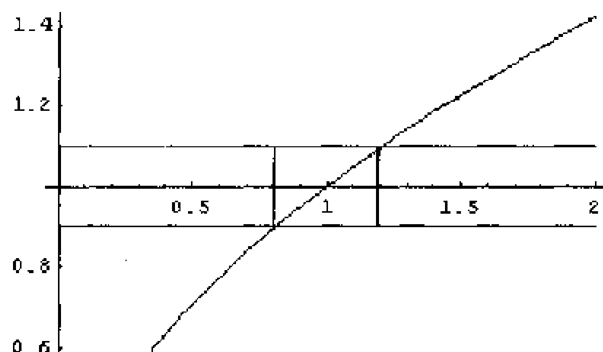


图 3-2-2

（3）最后从数值上进行观察。

```
In[]:=n=10;
   f[x_]:=x^(1/2)
   For[i=1,i<=n-1,i++,
        x1=N[0.9+0.1*i/n,5];x2=N[1.1-0.1*i/n,5];
        Print["x1=",x1,"   ","f(x1)=",f[x1],"   ",
              "x2=",x2,"   ","f(x2)=",f[x2]]]
```

Out[]=

```
x1=0.91   f(x1)=0.953939   x2=1.09   f(x2)=1.04403
x1=0.92   f(x1)=0.959166   x2=1.08   f(x2)=1.03923
x1=0.93   f(x1)=0.964365   x2=1.07   f(x2)=1.03441
x1=0.94   f(x1)=0.969536   x2=1.06   f(x2)=1.02956
x1=0.95   f(x1)=0.974679   x2=1.05   f(x2)=1.0247
x1=0.96   f(x1)=0.979796   x2=1.04   f(x2)=1.0198
x1=0.97   f(x1)=0.984886   x2=1.03   f(x2)=1.01489
x1=0.98   f(x1)=0.989949   x2=1.02   f(x2)=1.00995
x1=0.99   f(x1)=0.994987   x2=1.01   f(x2)=1.00499
```

由输出结果可以看到，x 越接近 $x_0=1$, $f(x)$ 与 $A=1$ 越接近。

例 3-2-3 从数值上观察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$，理解无穷大的概念。

```
In[]:=Clear[f];
      n=20;
      f[x_]:=Abs[1/x];
      For[i=10,i<=n-1,i++,
            x1=N[10^(-i),5];x2=N[-10^(-i),5];
            Print["x1=",x1,"   ","f(x1)=",f[x1],"   ",
            "x2=",x2,"   ","f(x2)=",f[x2]]
         ]
Out[]=
```

$x1=1.\times10^{-10}$	$f(x1)=1.\times10^{10}$	$x2=-1.\times10^{-10}$	$f(x2)=1.\times10^{10}$
$x1=1.\times10^{-11}$	$f(x1)=1.\times10^{11}$	$x2=-1.\times10^{-11}$	$f(x2)=1.\times10^{11}$
$x1=1.\times10^{-12}$	$f(x1)=1.\times10^{12}$	$x2=-1.\times10^{-12}$	$f(x2)=1.\times10^{12}$
$x1=1.\times10^{-13}$	$f(x1)=1.\times10^{13}$	$x2=-1.\times10^{-13}$	$f(x2)=1.\times10^{13}$
$x1=1.\times10^{-14}$	$f(x1)=1.\times10^{14}$	$x2=-1.\times10^{-14}$	$f(x2)=1.\times10^{14}$
$x1=1.\times10^{-15}$	$f(x1)=1.\times10^{15}$	$x2=-1.\times10^{-15}$	$f(x2)=1.\times10^{15}$
$x1=1.\times10^{-16}$	$f(x1)=1.\times10^{16}$	$x2=-1.\times10^{-16}$	$f(x2)=1.\times10^{16}$
$x1=1.\times10^{-17}$	$f(x1)=1.\times10^{17}$	$x2=-1.\times10^{-17}$	$f(x2)=1.\times10^{17}$
$x1=1.\times10^{-18}$	$f(x1)=1.\times10^{18}$	$x2=-1.\times10^{-18}$	$f(x2)=1.\times10^{18}$
$x1=1.\times10^{-19}$	$f(x1)=1.\times10^{19}$	$x2=-1.\times10^{-19}$	$f(x2)=1.\times10^{19}$

由输出结果可以看到，x越接近0，$|f(x)|$的值越大。

例 3-2-4 观察函数 $y=x\sin x$ 的图形，体会无穷大量与无界函数的区别。

将 $y=x\sin x$, $y=x$, $y=-x$ 的图形画在一张图上，输入以下语句：

```
In[]:=Plot[{x*Sin[x], x, -x}, {x, -20, 20}, PlotStyle ->
        {RGBColor[1, 0, 0],RGBColor[0, 0, 1],RGBColor[0, 0, 1]}]
Out[]=
   - Graphics -
```

输出图形如图 3-2-3 所示。

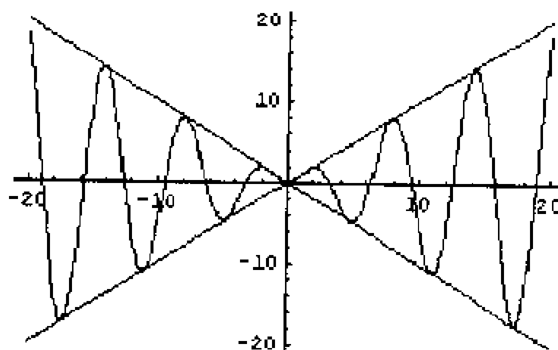


图 3-2-3

由图可见，函数 $y=x\sin x$ 在其定义域内无界，但非无穷大量。

例 3-2-5 无穷小的阶及其比较。

由极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

知，当 $x\to 0$ 时，$y_1=e^x-1$ 是 x 的一阶无穷小，$y_2=1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小，$y_3=x-\sin x$ 是 x 的三阶无穷小。

下面我们从几何和数值两个方面来观察无穷小的阶数对无穷小趋近于零的速度的影响。

（1）先从图形上观察。

```
In[]:=Plot[{E^x - 1, 1 - Cos[x], x - Sin[x]}, {x, -1, 1}, PlotRange -> {-1, 1},
        PlotLabel -> {"E^x-1 , 1-Cos[x] , x-Sin[x]"},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 3-2-4 所示。由图可知，无穷小的阶数越高，函数趋近于零的速度越快。

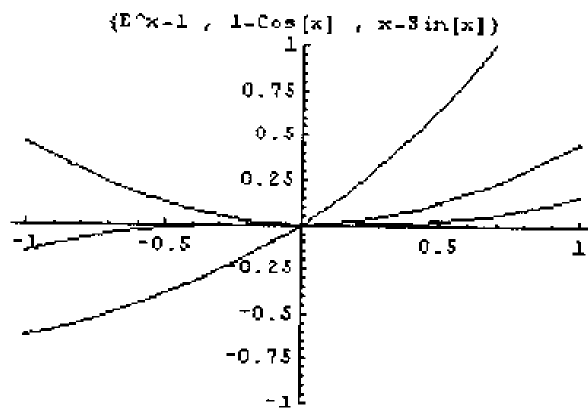


图 3-2-4

（2）下面再从数值上进行观察。

```
In[]:=n=5;
    Print[" xi          e^x-1               1-cosx             x-Sinx"];
    For[i=0,i<=n,i++,xi=(0.1)^i;
        y1=N[E^xi-1,5];y2=N[1-Cos[xi],5];y3=N[xi-Sin[xi],5];
        Print[xi,"    ",y1,"    ",y2,"    ",y3]
    ]
Out[]=
```

xi	e^x-1	1-cosx	x-Sinx
1	1.71828	0.459698	0.158529
0.1	0.105171	0.00499583	0.000166583
0.01	0.0100502	0.0000499996	1.66666×10^{-7}
0.001	0.0010005	$5.\times10^{-7}$	1.66667×10^{-10}

0.0001	0.000100005	$5.\times10^{-9}$	1.66667×10^{-13}
0.00001	0.0000100001	$5.\times10^{-11}$	1.66667×10^{-16}

数值输出结果与图形观察结果一致。

实验内容

练习 1　将例 3-2-1（1）的程序中数列 x_n 的项数 n 不断增大，进一步观察输出结果。

练习 2　将例 3-2-1（2）的程序中数 e 的取值不断缩小，观察输出结果。验证结论：不论 e 多么小，总存在 N，当 $n>N$ 时，点 (n,x_n) 完全落在了 $y=A-e$ 与 $y=A+e$ 之间，即 $|x_n-A|<e$。

练习 3　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$，用 Mathematica 编写程序，从数值和几何两方面观察数列与其极限值的接近程度，体会极限的概念。

练习 4　已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$，编写一小段程序，对于任意给定的常数 $\varepsilon>0$，找出使不等式 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立的正整数 N。

练习 5　将例 3-2-2（2）的程序中数 e 的取值不断缩小，观察输出结果。验证结论：不论 e 多么小，总存在 a，当 $|x-1|<a$ 时，函数图形完全落在了带形区域 $y=1-e$ 与 $y=1+e$ 之间，即 $|f(x)-1|<e$。

练习 6　适当改变例 3-2-3 的程序中的语句，进一步观察输出结果，体会无穷大量的概念。

练习 7　将 $|x|$ 的取值尽量缩小，画出函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形并观察极限值 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$。

练习 8　将 $|x|$ 的取值尽量放大，画出函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 的图形并观察当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 是否为有界函数，当 $x\to\infty$ 时，$y=x\sin\frac{1}{x}$ 是否为无穷大。编写一段程序，从数值上验证你的结论。

练习 9　选取适当的区间画出函数 $y=x\cos x$ 的图形，并观察函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界，当 $x\to\infty$ 时函数是否为无穷大。

实验 3-3 导数的概念及其几何意义

实验目的

1. 用几何方法验证、演示导数的概念。
2. 用几何方法演示导数的几何意义。

实验指导

例 3-3-1 由切线的定义我们知道，一条曲线 C 在点 M 处的切线是过该点的割线 MN 当点 N 沿着曲线 C 趋向点 M 时，割线 MN 绕 M 点旋转的极限，于是切线的斜率也就是过 M 点的割线 MN 的斜率的极限。我们以曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率为例，从数值和几何两方面来说明以上结论。

（1）先求 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的导数。

```
In[]:=f[x_]:=x^3;
  D[f[x],x];
  t=%/.x->1
Out[]=
   3
```

即曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率 $k=3$。

（2）下面从数值上观察切线斜率与割线斜率的关系。

```
In[]:=n=10; g[x_]:=(x^3-1)/(x-1);
     For[i=1,i<=n-1,i++,
         x1=N[1+10^(-i),5];x2=N[1-10^(-i),5];
     Print["x1=",x1,"    ","g(x1)=",g[x1],"    ",
           "x2=",x2,"    ","g(x2)=",g[x2]]]
Out[]=
x1=1.1       g(x1)=3.31       x2=0.9       g(x2)=2.71
x1=1.01      g(x1)=3.0301     x2=0.99      g(x2)=2.9701
x1=1.001     g(x1)=3.003      x2=0.999     g(x2)=2.997
x1=1.0001    g(x1)=3.0003     x2=0.9999    g(x2)=2.9997
x1=1.00001   g(x1)=3.00003    x2=0.99999   g(x2)=2.99997
```

```
x1=1.     g(x1)=3.     x2=0.999999     g(x2)=3.
x1=1.     g(x1)=3.     x2=1.     g(x2)=3.
x1=1.     g(x1)=3.     x2=1.     g(x2)=3.
x1=1.     g(x1)=3.     x2=1.     g(x2)=3.
```

（3）下面可以从几何上观察割线的位置与切线位置的关系。

```
In[]:=f[x_]:=x^3;
    Do[Plot[{f[x],f[1]+2^t*(f[1+1/2^t]-f[1])*(x-1)},
      {x,0,2.5},PlotRange->{0,9},PlotStyle->
        {RGBColor[0,0,1],RGBColor[1,0,0]}],{t,0,8,1/2}]
```

选择 Ctrl+Y 组合键可以进行动画演示割线逼近切线，割线的斜率逼近导数的过程。

例 3-3-2 动画演示函数 $y = \sin x$ 的导数与函数 $y = \cos x$ 的关系，验证导数公式 $(\sin x)' = \cos x$。

```
In[]:=f[x_]:=Sin[x];
    Do[Plot[{Cos[x],(f[x+1/t]-f[x])/(1/t)},{x,-2Pi,2Pi},PlotRange->{-2,2},
      PlotStyle->{RGBColor[0,0,1],RGBColor[1,0,0]}],{t,1,15}]
```

例 3-3-3 画出函数 $y = x + \sin x$ 及其导函数的图形，从几何上验证单调函数的导函数不一定是单调函数。

输入程序：

```
In[]:=f[x_] := x + Sin[x];
    Plot[{f[x], f'[x]}, {x, -10, 10},
      PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 3-3-1 所示。

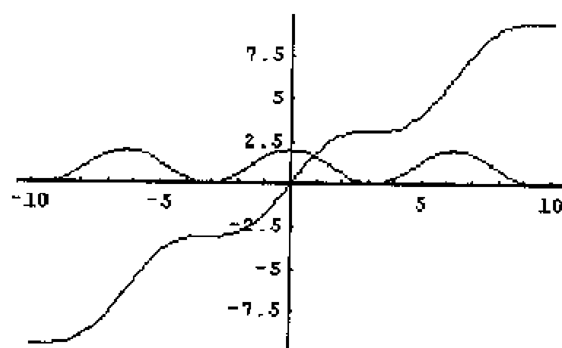


图 3-3-1

实验内容

练习　编写程序，用几何的方法验证基本初等函数的导数公式。

实验 3-4　定积分的概念及其几何意义

实验目的

通过几何与数值相结合的方法演示定积分的概念和定积分的几何意义。

实验指导

定积分的思想是“分割、近似、求和、取极限”。若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

例 3-4-1　动画演示小矩形面积的和逼近曲边梯形的面积。

输入以下程序可以动画演示小矩形面积的和逼近曲边梯形的面积。

```
In[]:=Clear[f];
    f[x_]:=x^2+1;a=0;b=2;m=0;
    g=Plot[f[x],{x,0,2},PlotStyle->RGBColor[1,0,0],
    DisplayFunction->Identity];
    For[n=0,n<100,n=n+4;t1={};t2={};
      For[i=0,i<n,i++,x1=a+(b-a)i/n;x2=x1+(b-a)/n;
        t1=Append[t1,Graphics[{RGBColor[0,1,0],
        Rectangle[{x1,0},{x2,f[x2]}]}]];
        t2=Append[t2,Graphics[{RGBColor[0,0,1],
        Rectangle[{x1,f[x1]},{x2,0}]}]]
          ];
    Show[t1,t2,g,PlotLabel->n"intervals"]
    ]
```

输出的部分图形如图 3-4-1 所示。

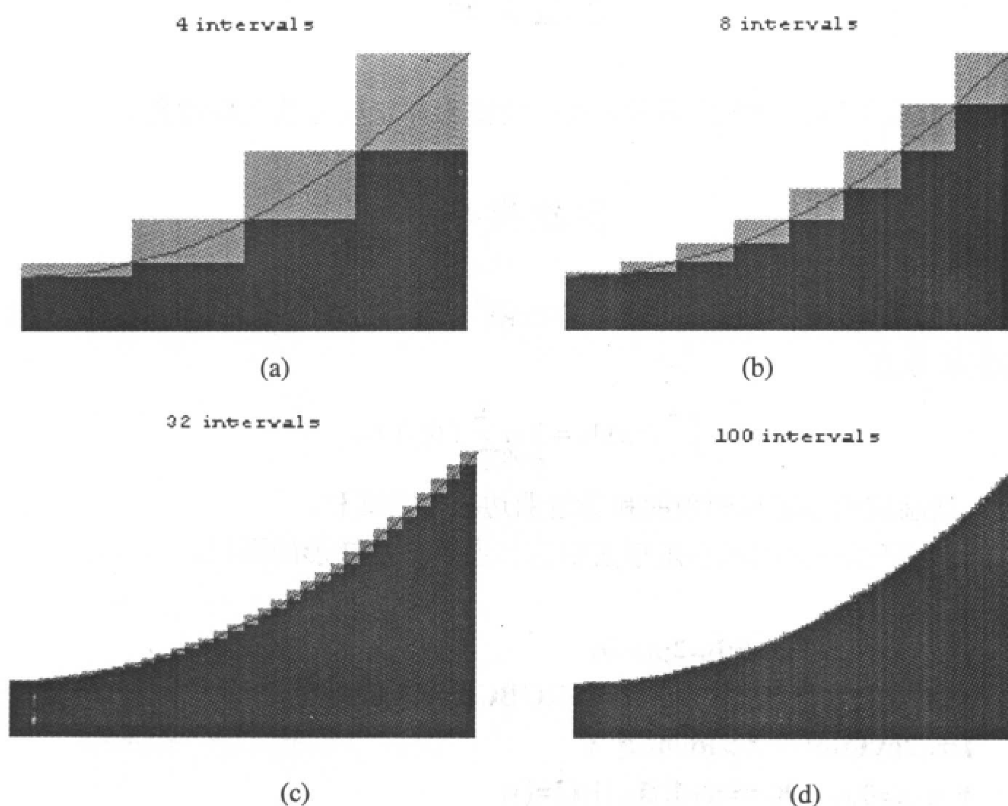
例 3-4-2　动画演示小梯形的面积和逼近曲边梯形的面积。

输入以下程序可以动画演示小梯形的面积和逼近曲边梯形的面积。

```
In[]:=Clear[f];
    f[x_]:=1-x^2;a=0;b=1;
    g0=Plot[f[x],{x,0,1},PlotStyle->RGBColor[1,0,0]]
    For[n=2,n<=10,n++,
      g1={};
      For[i=0,i<n,i++,x1=a+(b-a)i/n;x2=x1+(b-a)/n;
```

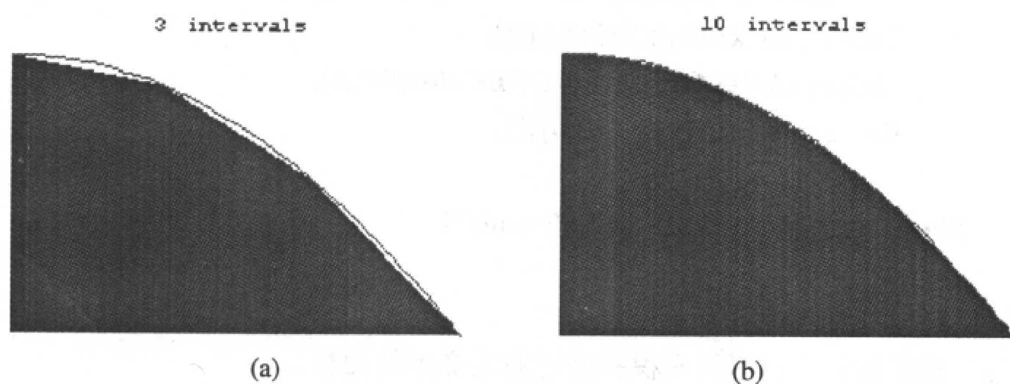
```
g1=Append[g1,Graphics[{RGBColor[0,0,1],
    Polygon[{{x1,0},{x1,f[x1]},{x2,f[x2]},{x2,0}}]}]]];
Show[g1,g0,PlotLabel->n" intervals "]]
```

输出的部分图形如图 3-4-2 所示。



(a) (b) (c) (d)

图 3-4-1



(a) (b)

图 3-4-2

例 3-4-3 以 $\int_1^2 x^2 \mathrm{d}x$ 为例观察积分和与定积分的关系。

（1）从数值上进行观察。

先求出积分值：

```
In[]:=Integrate[x^2,{x,1,2}]//N
Out[]:=
```

```
2.33333
```

即积分的近似值为 2.33333。

在区间 $[a,b]$ 上任意插入 $n-1$ 个分点，为保证分割加细时，各小区间的长度趋于 0，在取分点时，让相邻两分点的距离小于 $2\frac{b-a}{n}$，分点取为 $x_i=a+(i+u_i)\frac{b-a}{n}$（$u_i\in[0,1]$ 为随机数）。在每一区间上任取一点 $c_i=x_i+v_i(x_{i+1}-x_i)$（$v_i\in[0,1]$ 为随机数）作积分和进行计算，程序如下：

```
In[]:=Clear[f,x];
     f[x_]:=x^2;
     a=1;b=2;n=10;
     For[k=1,k<=7,k++,n=n*2;
        Array[x,{n+1}];
        x[0]=a;x[n]=b;s=0;
        Do[x[i]=a+(i+Random[])*(b-a)/n,{i,1,n-1}];
        For[i=0,i<n,i++,
            c=x[i]+Random[]*(x[i+1]-x[i]);
            s=s+f[c]*(x[i+1]-x[i])];
        Print["n=",n,"    s=",s]
      ]
```

输出结果如下（运行结果可能有差异）：

```
Out[]:=
  n=20    s=2.33397
  n=40    s=2.32706
  n=80    s=2.33604
  n=160    s=2.33366
  n=320    s=2.33307
  n=640    s=2.33331
  n=1280    s=2.33335
```

（2）从几何上进行观察。

我们知道，$f(x)\ge 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值表示由 $x=a$，$x=b$，$y=0, y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积，下面我们从几何上绘制分划逼近图，用小矩形的面积和逼近曲边梯形的面积。

```
In[]:=Clear[f,x,a,b,r];
     f[x_]:=x^2;
     a=0;b=1;n=0;
     g=Plot[f[x],{x,a,b},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]},
         DisplayFunction->Identity];
     For[j=3,j<=200,j+=2,n=j;r={};
```

```
    Array[x,{n+1}];x[0]=a;x[n]=b;
    Do[x[i]=a+(i+Random[])*(b-a)/n,{i,1,n-1}];
For[i=0,i<n,i++,
  c=x[i]+Random[]*(x[i+1]-x[i]);
  r=Append[r,Graphics[{RGBColor[0,0,1],Rectangle[{x[i],0},{x[i+1],f[c]}]}]]];
  Show[r,g,PlotLabel->(n-1)"points"]]
```

运行后得到的部分图形如图 3-4-3 所示，这些图形还可以动画演示逼近过程。虽然每次运行后的图形可能有差异，但总的趋势是，分割点个数越多，小矩形的面积之和越逼近曲边梯形的面积，即积分和越逼近积分值。

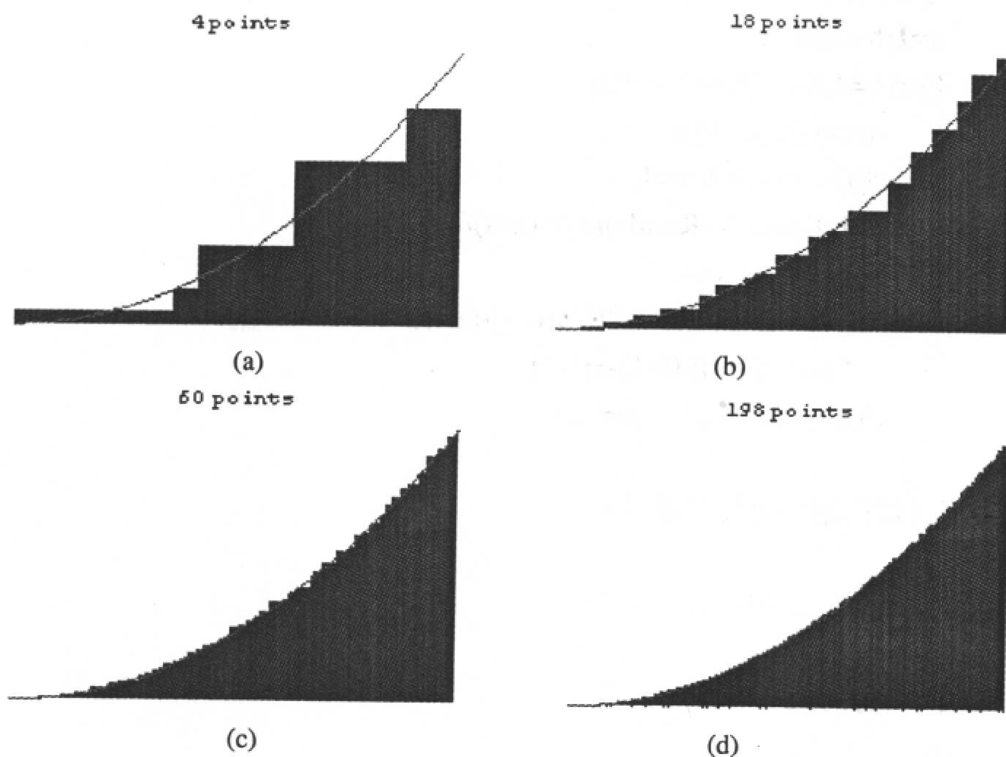


图 3-4-3

实验内容

练习 1　设 $f(x)=x^3-3x^2+x+5$，（$x\in[-1,3]$），根据定积分的定义编写一段程序，从几何上演示用小矩形面积和逼近曲边梯形面积的过程。

练习 2　设 $f(x)=x^3-3x^2+x+5$，（$x\in[-1,3]$），根据定积分的定义编写一段程序，从几何上演示用小梯形面积和逼近曲边梯形面积的过程。

实验 3-5　Taylor 公式与函数的多项式逼近

实验目的

1. 通过几何与数值的方法演示用 Taylor 多项式逼近函数的思想。

2. 通过几何与数值结合的方法演示用函数的 Taylor 多项式对函数进行近似表示时，x_0 和 n 对近似程度的影响。

实验指导

在各类初等函数中，多项式是最简单的一种。这是因为多项式只涉及加法、减法和乘法三种运算，因此，对于多项式来说无论是数值运算还是微积分运算都十分简单。如何用一个多项式来逼近给定的函数，Taylor 公式给出了答案。

定理（Taylor 公式）　如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有公式 $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ 成立，其中

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\ \xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}$$

称 $P_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的 n 阶 Taylor 多项式。当用 $P_n(x)$ 近似表示 $f(x)$ 时，可用 $R_n(x)$ 计算误差。

例 3-5-1　通过几何直观观察 $y=\sin x$ 在 $x_0=0$ 点的 $n=1,3,5,7$ 阶 Taylor 多项式与函数的近似程度。

```
In[]:=Clear[x,f,n];f[x_]:=Sin[x];Do[a=Normal[Series[f[x],{x,0,n}]];
     Plot[{f[x],a},{x,-2Pi,2Pi},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
          RGBColor[0,0,1]}],{n,1,7,2}]
Out[]=
        - Graphics -
```

输出图形如图 3-5-1 所示。

例 3-5-2　以函数 $y=e^x$ 为例，观察用函数的 Taylor 多项式对函数进行近似表示时，x_0 和 n 对近似程度的影响。

（1）固定 $x_0=0$ 让 n 增大。首先从几何上进行观察：

```
In[]:=Clear[f,x,t];f[x_]:=E^x;
     For[i=2,i<=5,i++,t=Normal[Series[f[x],{x,0,i}]];
```

```
Plot[{f[x],t},{x,-3,3},PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],
    RGBColor[0,0,1]},PlotLabel->{"n    ",i}]]
```

Out[]=

- Graphics -

输出图形如图 3-5-2 所示。

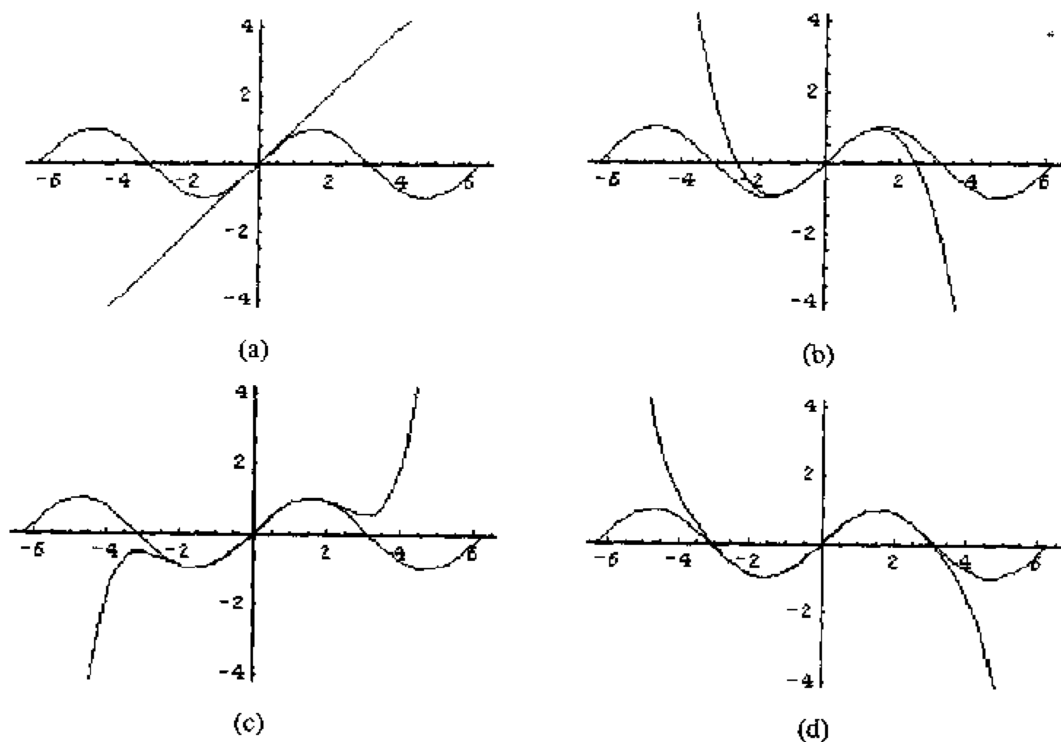


图 3-5-1

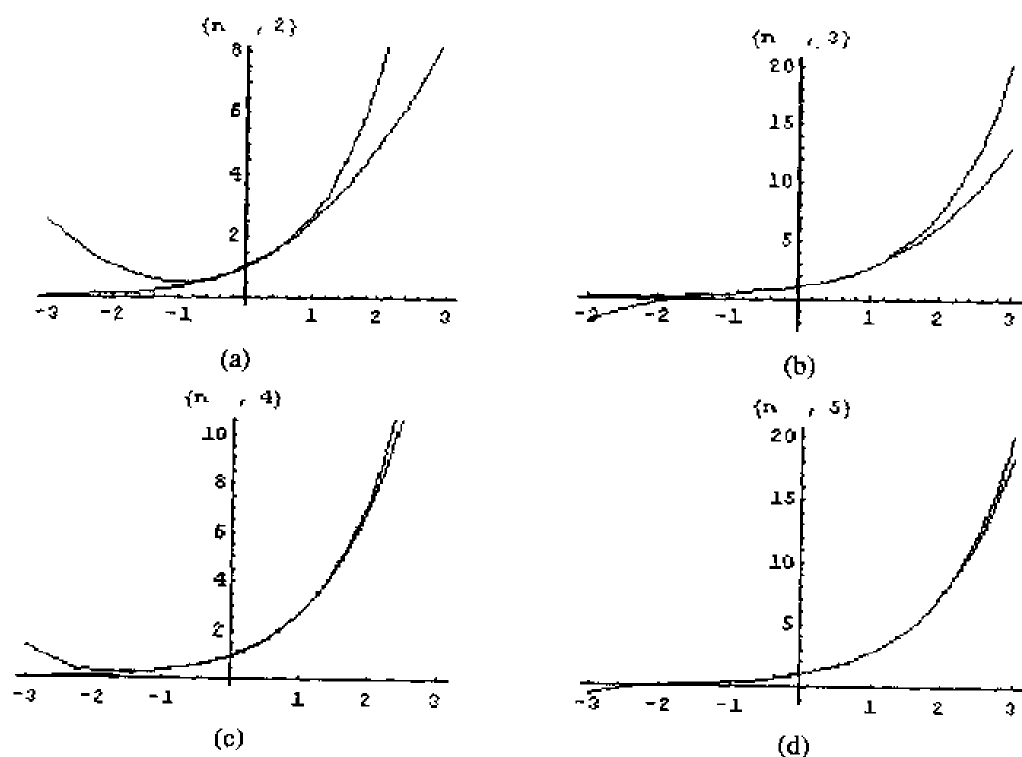


图 3-5-2

然后从数值上进行观察：

```
In[]:=Clear[f,x,ti,ri];
  f[x_]:=Exp[x];
  For[i=1,i<=10,i++,
    ti=Normal[Series[f[x],{x,0,i}]];
    ri=N[Abs[f[x]-ti]/.x->1,5];
   Print["n=",i,"    ","r=",ri]]
Out[]=
   n=1  r=0.718282
   n=2  r=0.218282
   n=3  r=0.0516152
   n=4  r=0.0099485
   n=5  r=0.00161516
   n=6  r=0.000226273
   n=7  r=0.0000278602
   n=8  r=3.05862×10^-6
   n=9  r=3.02886×10^-7
   n=10  r=2.73127×10^-8
```

（2）固定 n 让 x_0 改变。输入以下程序，从几何上进行观察：:

```
In[]:=f[x_]:=E^x;
    For[x0=-2,x0<=3,x0+=2,
      Series[f[x],{x,x0,3}]//N;t=Normal[Series[f[x],{x,x0,3}]];
      Plot[{f[x],t},{x,-4,5},AspectRatio->Automatic,PlotRange->{-2,6},
          PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]},PlotLabel->{"x0=",x0}]
    ]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 3-5-3 所示。

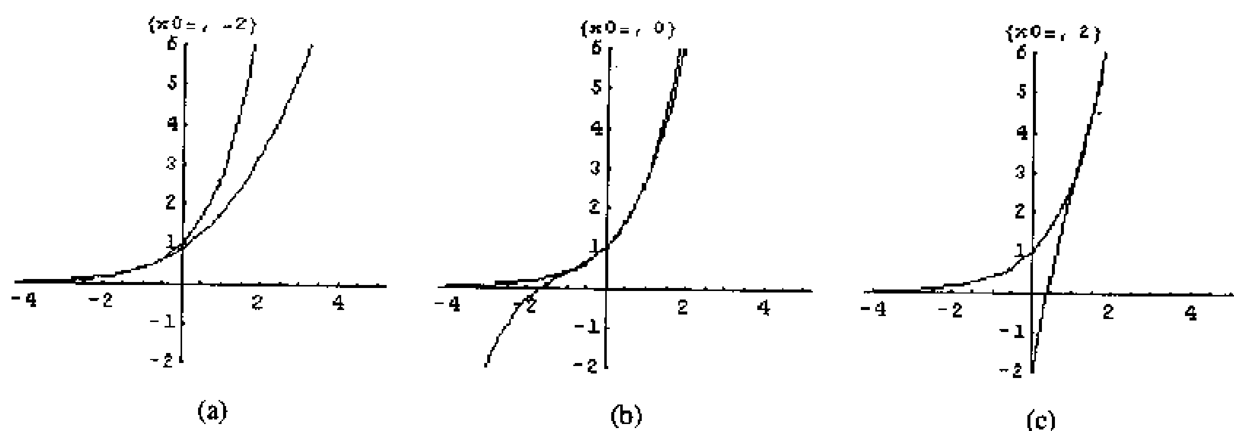


图 3-5-3

由以上图形可以观察出若n固定，x_0不同，则$f(x)$的 Taylor 多项式也不相同，在x_0附近$f(x)$与其 Taylor 多项式接近程度最好。

实验内容

练习 1 自由选择函数，从几何上观察函数的各阶 Taylor 多项式的图形与函数图形的关系。

练习 2 通过例 3-5-2（1）中几何和数值的观察，你能知道用 Taylor 多项式对函数进行近似表示时，多项式的次数n对近似程度有什么影响吗？自由选择其它函数，编写程序进行观察。

练习 3 编写一段程序，对以上观察结果从数值上进行验证。

练习 4 任选一个函数并用 Mathematica 编写程序，分别从几何和数值上进行观察：用函的 Taylor 多项式对函数进行近似表示时，x_0和n对近似程度的影响。

实验 3-6　Taylor 级数与 Fourier 级数的收敛性

实验目的

从几何与数值两个方面验证和演示 Taylor 级数、Fourier 级数的收敛性。

实验指导

设函数 $f(x)$ 在包含 $x=x_0$ 的某个区间内具有任意阶导数，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$（在 $x=x_0$ 点）的 Taylor 级数，当 $x_0=0$ 时称其为 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数。

$f(x)$（在 $x=x_0$ 处）的 Taylor 级数是由 $f(x)$ 及其各阶导数在 $x=x_0$ 点的值构造出来的一个幂级数，这个幂级数的收敛性如何？它的和函数与 $f(x)$ 有怎样的关系？

例 3-6-1　将 $y=\sin x$ 展开为 Maclaurin 级数，并观察随着项数的增加，级数的部分和函数是怎样逼近函数的。

```
In[]:=Clear[n, ti];
   n = 50;
   For[i = 0, i <= n, i += 5,
      ti = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, i}]];
      Plot[{Sin[x], ti}, {x, -5Pi, 5Pi}, PlotRange -> {-1.5, 1.5},
         PlotLabel -> {"n=", i}, PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0],
         Dashing[{0.03, 0.02}]}, {RGBColor[0, 0, 1]}}]
    ]
```

运行之后输出的部分图形如图 3-6-1。将上述程序中输出的所有图形选中，按 Ctrl+Y 组合键还可以动画演示收敛过程。

在实际问题中经常需要将一个周期函数分解成一系列简单周期函数的叠加。这个问题在数学中便是求周期函数的 Fourier 级数。在怎样的条件下一个函数的 Fourier 级数收敛于函数本身呢？

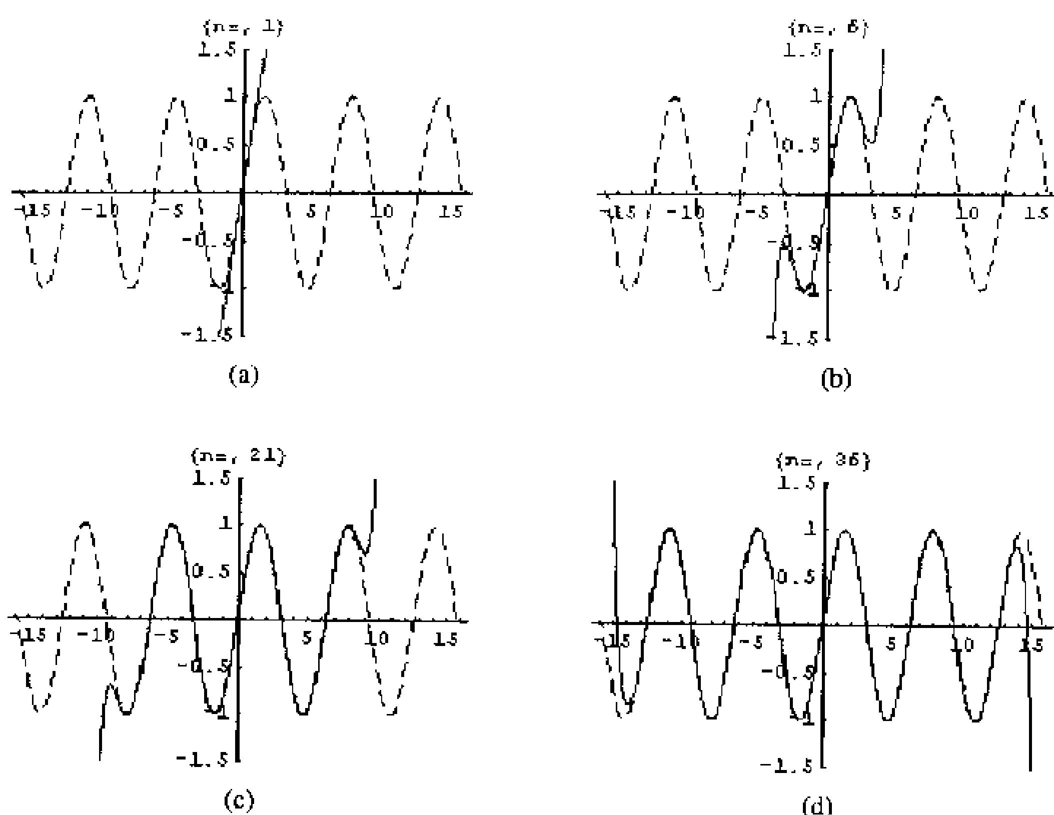


图 3-6-1

例 3-6-2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

下面我们从几何上来观察 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$ 的过程。

```
In[]:= Clear[x,f,Si,n,a0];
    a0=1/Pi*Integrate[x,{x,0,Pi}]
    a[n_]=1/Pi*Integrate[x*Cos[n*x],{x,0,Pi}]          (* 计算正弦项的系数 *)
    b[n_]=1/Pi*Integrate[x*Sin[n*x],{x,0,Pi}]          (* 计算余弦项的系数 *)
    f[x_]:=Which[x<-2Pi,0,-2Pi<=x<-Pi,x+2Pi,-Pi<=x<0,0,
          0<=x<Pi,x,Pi<=x<2Pi,0,x>=2Pi,x-2Pi];         (* 定义周期函数 f(x) *)
    For[i=1,i<30,i+=3,
        Si[x_]:=a0/2+Sum[a[n]*Cos[n*x]+b[n]*Sin[n*x],{n,1,i}];
                                     (* 定义 f(x) 的 Fourier 级数的前 i 项和 *)
    Plot[{f[x],Si[x]},{x,-3Pi,3Pi},PlotRange->{-0.5,3.5},
        PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]},
        PlotLabel->{"n=", i}]
    ]
```

运行后部分图形如图 3-6-2。将上述程序输出的所有图形选中，按 Ctrl+Y 组合键还可以动画演示收敛过程。

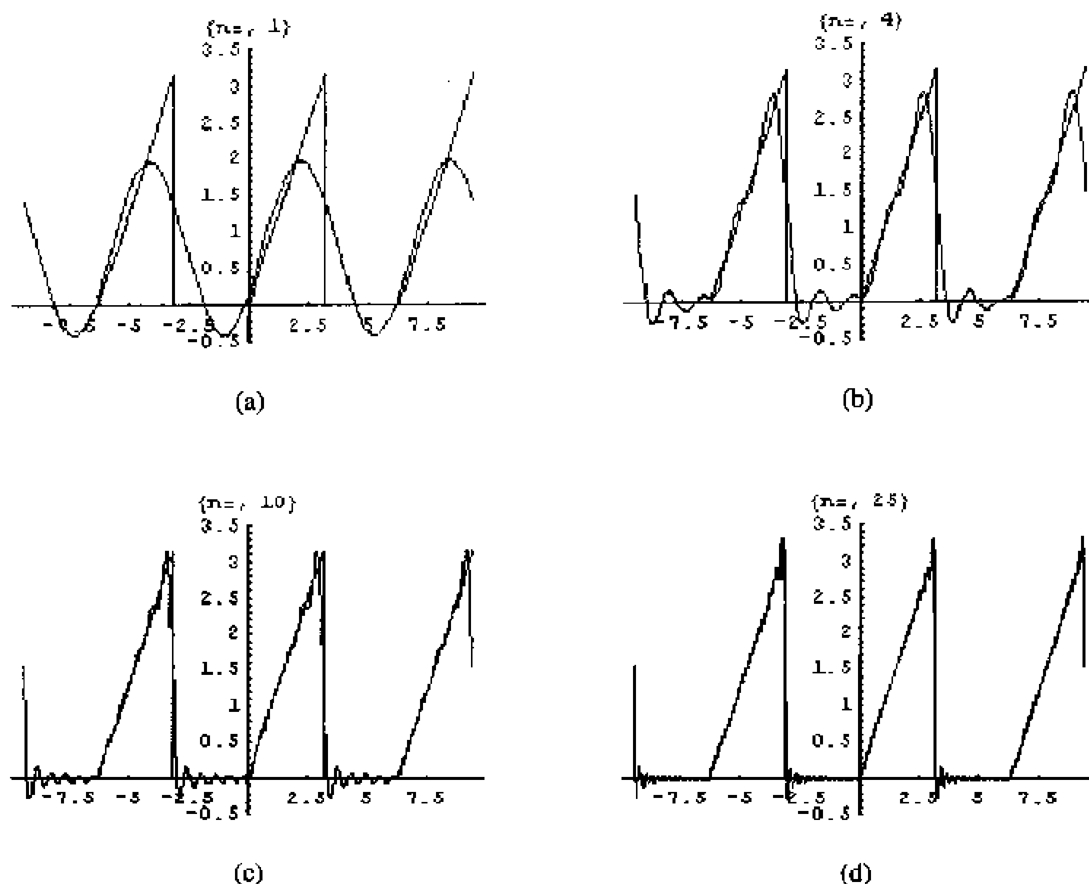


图 3-6-2

例 3-6-3　将 $f(x)=x+1$ $(0\le x\le \pi)$ 展开为正弦级数和余弦级数，并观察级数的部分和数列逼近函数的过程。

（1）将 $f(x)$ 展开成正弦级数。

先对 $f(x)$ 进行奇延拓，得到以 2π 为周期的周期函数 $g(x)$，如图 3-6-3 所示。

```
In[]:=f[x_] := If[x > 0 && x < Pi, x + 1];
  g[x_] := Which[x < -2Pi, x + 2Pi - 1, -2Pi <= x < -Pi,
      x + 2Pi + 1, -Pi <= x < 0, x - 1, 0 <= x < Pi, x + 1, Pi <= x < 2Pi,
      x - 2Pi - 1, x > 2Pi, x - 2Pi + 1];
  Plot[{f[x], g[x]}, {x, -3Pi, 3Pi},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.02, 0.02}]}];
```

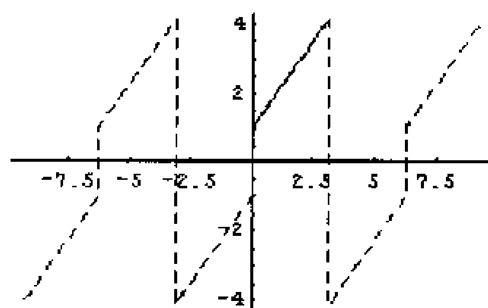
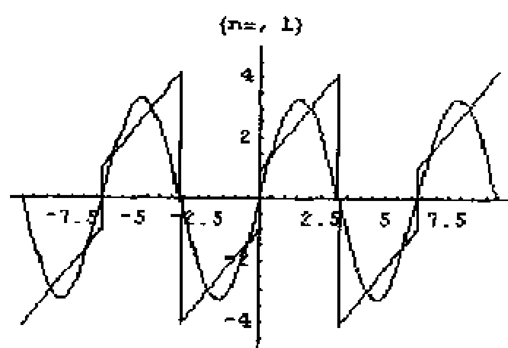


图 3-6-3

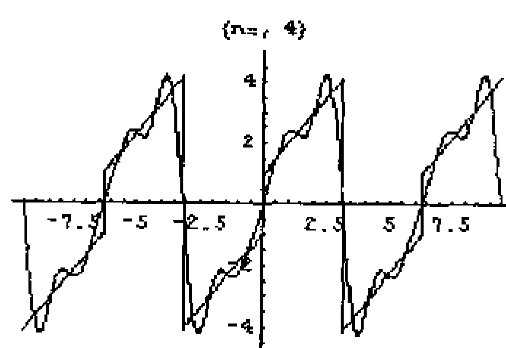
再将 $g(x)$ 展开为正弦级数，并从几何上观察正弦级数的部分和数列逼近函数的过程，如图 3-6-4 所示。

```
In[]:=b[n_] = 2/Pi*Integrate[(x + 1)*Sin[n*x], {x, 0, Pi}];
    i = 5;
    Si[x_] := Sum[b[n]*Sin[n*x], {n, 1, i}];
    Si[x]
    For[i = 1, i < 30, i += 3,
      Plot[{g[x], Si[x]}, {x, -3Pi, 3Pi}, PlotRange -> {-5, 5},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
        PlotLabel -> {"n=", i}]];
Out[]=
```

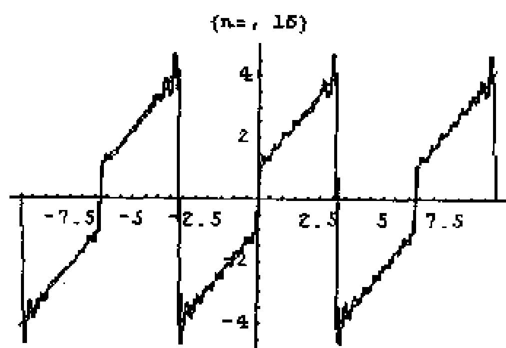
$$\frac{2(2+\pi)\,\mathrm{Sin}[x]}{\pi}+\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1-\pi)\right)\mathrm{Sin}[2x]}{\pi}+\frac{2\left(\frac{1}{3}+\frac{1+\pi}{3}\right)\mathrm{Sin}[3x]}{\pi}+\frac{2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1-\pi)\right)\mathrm{Sin}[4x]}{\pi}+\frac{2\left(\frac{1}{5}+\frac{1+\pi}{5}\right)\mathrm{Sin}[5x]}{\pi}$$



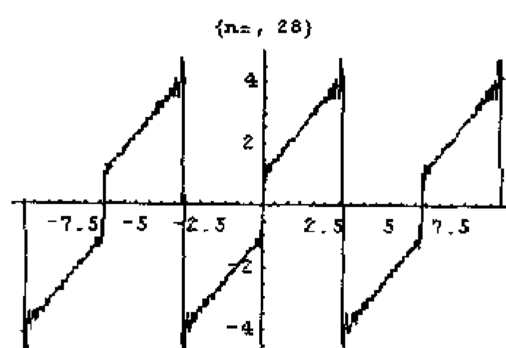
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3-6-4

（2）将 $f(x)$ 展开成余弦级数。

对 $f(x)$ 进行偶延拓，得到以 2π 为周期的周期函数 $h(x)$，如图 3-6-5 所示。

```
In[]:=Clear[x, f, g, Si, n, a0, a, b, r];
   f[x_] := If[x > 0 && x < Pi, x + 1];
   h[x_] := Which[x < -2Pi, -x - 2Pi + 1, -2Pi <= x < -Pi,
        x + 2Pi + 1, -Pi <= x < 0, -x + 1, 0 <= x < Pi, x + 1,
        Pi <= x < 2Pi, -x + 2Pi + 1, x >= 2Pi, x - 2Pi + 1];
   Plot[{f[x], g[x]}, {x, -3Pi, 3Pi}, PlotRange -> {-5, 5},
     PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.02, 0.02}]}];
```

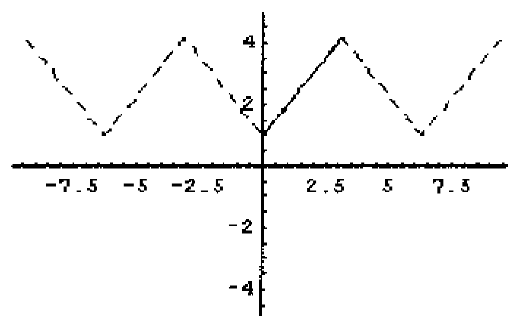


图 3-6-5

将 $h(x)$ 展开为余弦级数，并从几何上观察余弦级数的部分和如何逼进函数，如图 3-6-6 所示。

```
In[]:=Clear[x, f, Si, n, a0, a, b];
   a0 = 2/Pi*Integrate[(x + 1), {x, 0, Pi}];
   a[n_] = 2/Pi*Integrate[(x + 1)*Cos[n*x], {x, 0, Pi}];
   i = 5;
   Si[x_] := a0/2 + Sum[a[n]*Cos[n*x], {n, 1, i}]; Si[x]
   h[x_] := Which[x < -2Pi, -x - 2Pi + 1, -2Pi <= x < -Pi,
         x + 2Pi + 1, -Pi <= x < 0, -x + 1, 0 <= x < Pi, x + 1,
         Pi <= x < 2Pi, -x + 2Pi + 1, x >= 2Pi, x - 2Pi + 1];
   For[i = 1, i < 30, i += 3,
     Plot[{h[x], Si[x]}, {x, -3Pi, 3Pi}, PlotRange -> {-5, 5},
       PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
       PlotLabel -> {"n=", i}]]
Out[]:=
```

$$\frac{\pi + \frac{\pi^2}{2}}{\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[x]}{\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,x]}{9\,\pi} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[5\,x]}{25\,\pi}$$

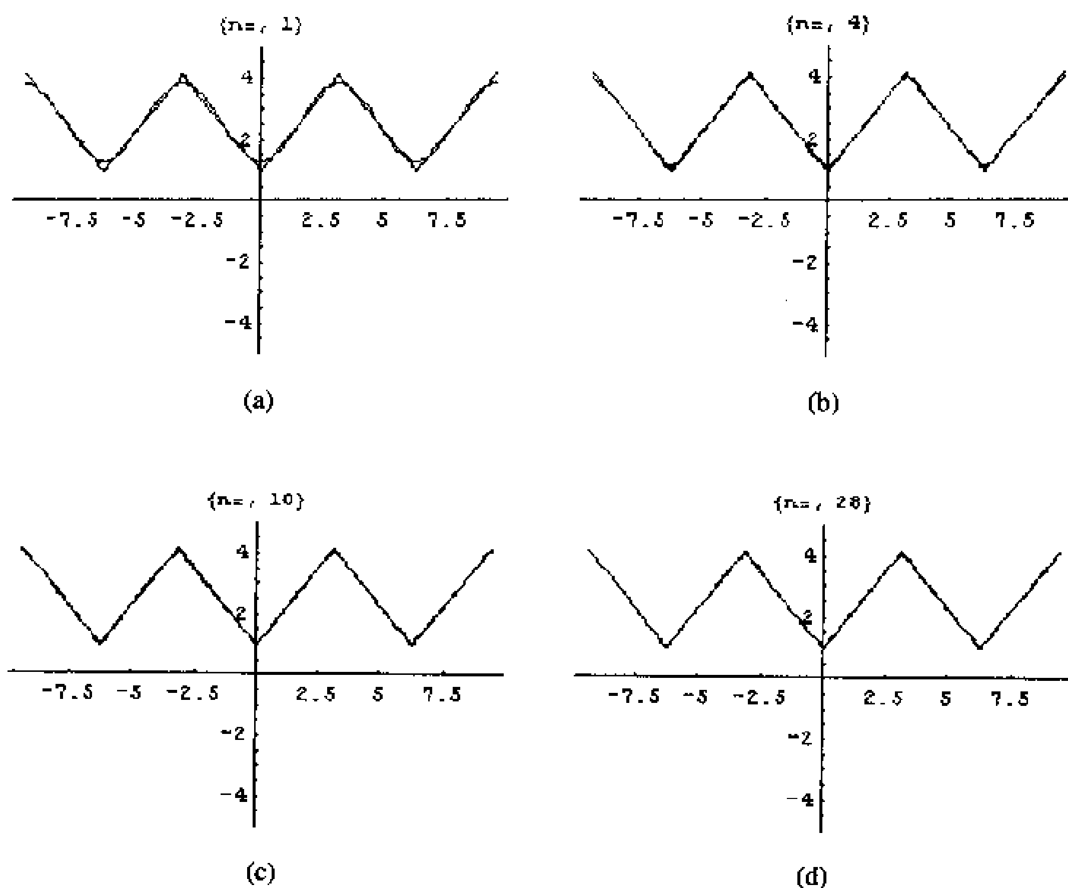


图 3-6-6

将所有图形选中，按 Ctrl+Y 组合键可以动画演示收敛过程。

实验内容

练习 1　将例 3-6-1 程序中的 n 值以及绘图区间不断增大，进一步观察收敛过程，你能得出什么结论？

练习 2　自由选择函数编写一段程序，从几何上观察其 Taylor 级数的收敛性。

练习 3　任意改变例 3-6-3（2）中的第 2 段程序里的数值 i，进一步观察输出结果。另外在间断点附近，逼近曲线是否总有较大的跳动？你能说明为什么吗？

实验 3-7　无理数 e 的研究

实验目的

利用 Mathematica 研究重要极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$，并求数学常数 e 的近似值。

实验指导

例 3-7-1　通过数值与几何相结合的方式观察数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的单调性和有界性。

下面观察随着 n 的增大，x_n 的变化情况。

```
In[]:=n = 1000;
        For[i = 1, i <= n, i += 100, xi = N[(1 + 1/i)^i, 10];
         Print["n=", i, "          ", "xn=", xi]]
Out[]=
     n=1      xn=2.
     n=101    xn=2.70495
     n=201    xn=2.71155
     n=301    xn=2.71378
     n=401    xn=2.7149
     n=501    xn=2.71557
     n=601    xn=2.71602
     n=701    xn=2.71635
     n=801    xn=2.71659
     n=901    xn=2.71677
```

从以上输出结果可以看出数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 是单调增加的，并且可以猜出 3 为其一个上界。即数列 x_n 为单调增加数列，记 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$。和 π 一样，e 也是重要的无理数，1727 年，瑞士数学家首先用字母 e 表示了这个重要的无理数。

例 3-7-2　e 的计算。

（1）利用数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 来计算。

```
In[]:=n=1000;
     e=N[(1+1/n)^n,10];
```

```
r=N[E-e,10];
Print["n=",n,"     e=",e,"     r=",r]
```

Out[]: =

```
n=1000    e=2.71692    r=0.0013579
```

由于数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛速度很慢，所以用 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 计算e误差较大。

（2）利用 e^x 的Taylor展开式来计算e。由于

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中，$R_n=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$。令 $x=1$ 得

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

误差满足 $|r_n|<\frac{3}{(n+1)!}$。

求出e的近似值并算出误差：

```
In[]:=n=12;
   sn=Normal[Series[E^x,{x,0,n}]];
   e=N[sn/.x->1,10];
   r=N[3/(n+1)!,10];
   Print["n=",n,"     e=",e,"     r<",r]
```

Out[]=

$n=12\quad e=2.71828\quad r<4.81771\times10^{-10}$

实验内容

练习1　不断增加例3-7-1的程序中的 n 值，进一步观察输出结果。

练习2　画出数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 的散点图，从几何直观上验证例3-7-1的结果。

练习3　观察当 n 趋于无穷大时数列 $x_n=(1+\frac{1}{n+1})^n$，$y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 的变化趋势：

（1）　求出当 $n=10^m$，$m=1,2,\cdots,10$ 时 x_n,y_n 的值，观察变化趋势。

（2）　将三个函数 $y=(1+\frac{1}{10^x+1})^{10^x}$，$y=(1+\frac{1}{10^x})^{10^x+1}$，$y=e$ 的图形画在一张图上，通过观察你能得出什么结论？你能否从理论上证明你的结论？

练习4　用Mathematica编写程序，取 n 为不同的值，用公式 $e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 求e的近似值，并估计误差。

实验 3-8　割圆术与无理数 π

实验目的

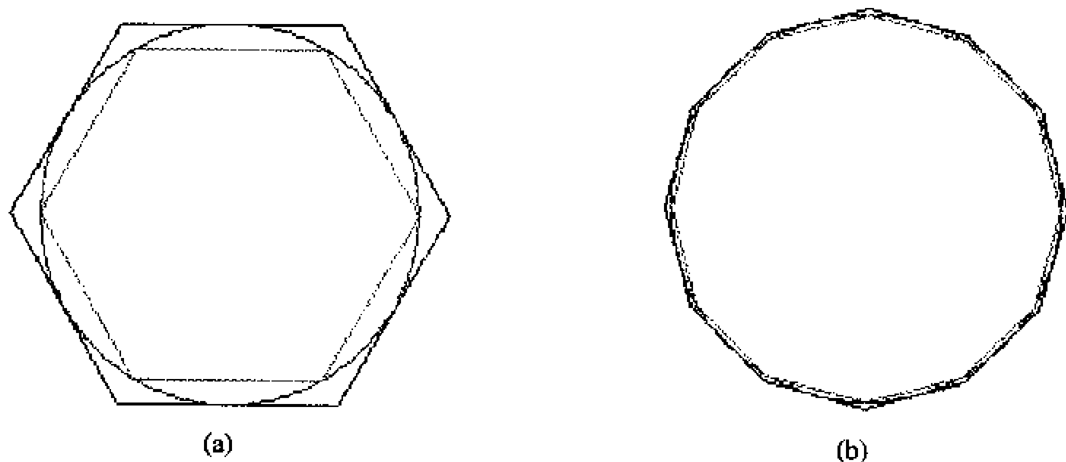
通过几何直观观察割圆术的思想和方法，并计算数学常数 π 的近似值。

实验指导

例 3-8-1　动画演示割圆术的方法，观察内接正多边形和外切正多边形如何逼近圆的面积。

```
In[]:=For[k = 0, k <= 5, k++,
        n = 6*2^k;
        v1 = Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Circle[{0, 0}, 1]}];
        v2 = Graphics[{RGBColor[0, 1, 0],
            Line[Table[{Cos[2Pi*i/n], Sin[2Pi*i/n]}, {i, 0, n}]]}];
        v3 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
             Line[Table[{Cos[2Pi*i/n]/Cos[Pi/n], Sin[2Pi*i/n]/Cos[Pi/n]},
             {i, 0, n}]]}];
        Show[v3, v1, v2, AspectRatio -> Automatic]]
```

输出的部分图形如图 3-8-1 所示。选中所有图形，按 Ctrl+Y 组合键可以动画演示割圆术的方法。



(a)　　(b)

图 3-8-1

例 3-8-2　π 的计算。

（1）利用圆内接正多边形的面积计算 π。

魏晋时我国著名数学家刘徽通过计算圆内接正 192 边形的面积，得到圆周率

$\pi=\dfrac{157}{50}=3.14$；后来，又计算出圆内接正3072边形的面积，得到圆周率$\pi=\dfrac{3927}{1250}=3.1416$。南北朝时数学家祖冲之运用这一方法精确地计算出$\pi$的值在3.1415926和3.1415927之间，是当时世界上最早的7位小数精确值。

下面我们用多边形的面积求π。

圆的面积S介于内接多边形S_1和外切多边形S_2之间，当圆的半径为1时，其面积恰好为π。单位圆的内接多边形面积为

$$S_1=2n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

单位圆的外切多边形面积为

$$S_2=n\tan\frac{\pi}{n}$$

故

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}<\pi<n\tan\frac{\pi}{n}$$

即可以用$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，$n\tan\frac{\pi}{n}$作为$\pi$的近似值。

输入以下程序计算π：

```
In[]:=Print["            a1", "            a2", "              r","              n"];
    For[k = 0, k <= 15, k++,
     n = 6*2^k;
     a1 = N[n/2*Sin[2Pi/n], 20]; a2 = N[n*Tan[Pi/n], 20]; r = a2 - a1;
     Print[a1, "        ", a2, "         ", r, "         ",n]
     ]
Out[]=
```

a1	a2	r	n
2.5980762113533159403	3.4641016151377545871	0.8660254037844386468	6
3.0000000000000000000	3.2153903091734724777	0.2153903091734724777	12
3.1058285412302491482	3.1596599420975004833	0.0538314008672513351	24
3.1326286132812381972	3.1460862151314349711	0.0134576018501967739	48
3.1393502030468672071	3.1427145996453682982	0.0033643965985010910	96
3.1410319508905096381	3.1418730499798238717	0.0008410990893142336	192
3.1414524722854620755	3.1416627470568485262	0.0002102747713864508	384
3.1415576079118576455	3.1416101766046895388	0.0000525686928318932	768
3.1415838921483184087	3.1415970343215261520	0.0000131421732077433	1536
3.1415904632280500957	3.1415937487713520280	$3.2855433019322\times10^{-6}$	3072
3.1415921059992715505	3.1415929273850970335	$8.213858254830\times10^{-7}$	6144
3.1415925166921574476	3.1415927220386138183	$2.053464563707\times10^{-7}$	12288
3.1415926193653839552	3.1415926707019980479	$5.13366140927\times10^{-8}$	24576

```
3.14159264503369 08967 3.1415926578678444198 1.28341535232×10^-8 49152
3.1415926514507676517 3.1415926546593060325 3.2085383808×10^-9 98304
3.1415926530550368417 3.1415926538571714369 8.021345952×10^-10 196608
```

即 $\pi\approx3.141592653$。

（2）用函数 $\arctan x$ 的幂级数展开式计算 π。

由于

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

令 $x=1$，可得

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

据此也可以计算 π。这个方法由 Leibniz 于 1674 年发现。

输入以下程序计算 π：

```
In[]:=For[i=0,i<=5000,i=i+500;
    d=N[4Sum[(-1)^j/(2j+1),{j,0,i}],5];
    r=N[4/(2i+3),5];
    Print["i=",i,"     Pi=",d,"       ri=",r]]
Out[]=
    i=500    Pi=3.14359    ri=0.00398804
    i=1000   Pi=3.14259    ri=0.001997
    i=1500   Pi=3.14226    ri=0.001332
    i=2000   Pi=3.14209    ri=0.000999251
    i=2500   Pi=3.14199    ri=0.00079952
    i=3000   Pi=3.14193    ri=0.000666333
    i=3500   Pi=3.14188    ri=0.000571184
    i=4000   Pi=3.14184    ri=0.000499813
    i=4500   Pi=3.14181    ri=0.000444296
    i=5000   Pi=3.14179    ri=0.00039988
    i=5500   Pi=3.14177    ri=0.000363537
```

由于级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ 收敛速度慢，因此计算时产生的误差较大。

（3）用常数项级数的和求 π。

由级数

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

可知，$|x|$的值越接近 0，级数收敛速度越快。

令
$$x=\tan\alpha=\frac{1}{5},\quad \alpha=\arctan\frac{1}{5}$$

则
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2x}{1-x^2}=\frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha=\frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}=\frac{2\times\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}=\frac{120}{119}\approx 1$$

因此$4\alpha\approx\frac{\pi}{4}$。令$\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$，则

$$\tan\beta=\frac{\tan 4\alpha-1}{1+\tan 4\alpha}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$$

$$\pi=16\alpha-4\beta=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}$$

$$\pi\approx 16\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{5^{2k+1}}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{239^{2k+1}}$$

输入以下程序计算π：

```
In[]:=For[k=5,k<=25,k=k+5,
    a=Normal[Series[ArcTan[x],{x,0,k}]];
    p=N[(16a/.x->1/5)-(4a/.x->1/239),20];
    r=Abs[N[Pi-p,20]];
    Print["k=",k];Print["Pi=",p];
    Print["r=",r]]
Out[]: =
    k=5
    Pi=3.1416210293250344250
    r=0.0000283757352411866
    k=10
    Pi=3.1415926824043995172
    r=2.88146062788×10^-8
    k=15
    Pi=3.1415926535886022287
    r=1.1910098×10^-12
    k=20
```

```
Pi=3.1415926535897916969
r=1.5415×10^-15
k=25
Pi=3.1415926535897932385
r=0.×10^-20
```

即 $\pi = 3.1415926535897932385$。

实验内容

练习　查阅有关资料找出计算π的近似值的方法，并比较这些方法的优劣。

实验 3-9　调和级数与欧拉常数γ

实验目的

通过几何直观观察调和级数的发散性，计算欧拉常数γ的近似值。

实验指导

例 3-9-1　研究调和级数的发散性。

我们知道调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，一个令人感兴趣的问题是，调和级数发散到无穷的速度有多快？或者说数列

$$H(n)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

趋于无穷的速度有多快？我们可以通过几何直观来观察。

先来观察调和级数前n项的和$H(n)=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{k}$的散点图。

```
In[]:=m=200;
    a=Table[Sum[1/k,{k,1,n}],{n,m}]//N;
    a1=ListPlot[a,PlotStyle->PointSize[0.01]]
```

输出图形如图 3-9-1 所示。从图中可以看出，调和级数发散的速度较慢。但是，它到底以什么样的速度发散到无穷？

我们再来观察数列$\{\ln(n+1)\}$的散点图。

```
In[]:=b=Table[Log[n+1],{n,m}]//N;
    b1=ListPlot[b,PlotStyle->PointSize[0.01]]
```

输出图形如图 3-9-2 所示。通过观察发现，调和级数发散的速度与数列$\{\ln(n+1)\}$的发散速度大致相同。

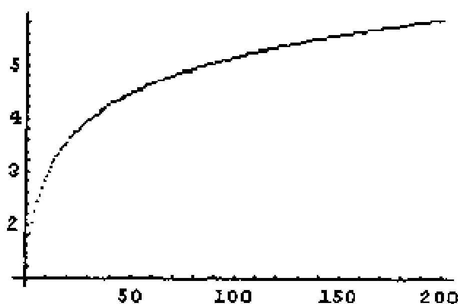


图 3-9-1

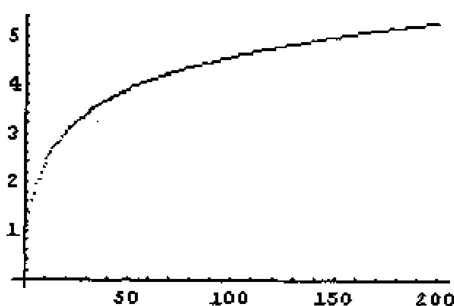
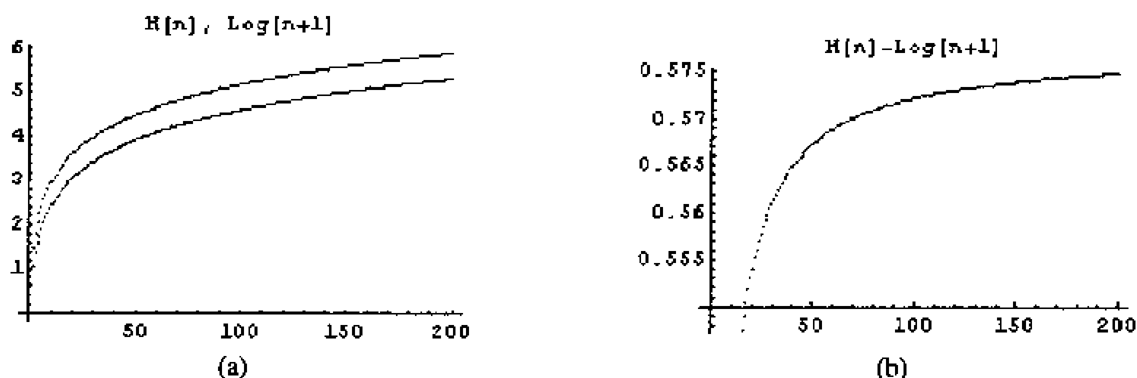


图 3-9-2

我们进一步从几何上验证上述结果。

```
In[]:=Show[a1, b1, PlotLabel -> "H[n], Log[n+1]"];
    ListPlot[a - b, PlotStyle -> PointSize[0.01], PlotLabel -> "H[n]-Log[n+1]"]
```

输出图形如图 3-9-3 所示。



(a) (b)

图 3-9-3

容易看出，当$n\to\infty$时， $H(n)-\ln(n+1)$是收敛的。

下面从理论上进行证明。事实上，设

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\int_{k}^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}x-\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$$

由于当$x\in(k,k+1)$时，有$\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$，故

$$0<S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{x})\mathrm{d}x<\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{n+1}<1$$

即S_n是正项级数，且有界，于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，记为$\gamma$，称$\gamma$为欧拉常数。

例 3-9-2 计算γ的近似值。

```
In[]:=t = Plot[1/x, {x, 0.5, 6},
        PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], Dashing[{0.02, 0.02}]}];
   k = 5; r = {};
   For[i = 1, i <= k - 1, i++,
    r = Append[r, Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
            Line[{{i, 1/i}, {i + 1, 1/i}, {i + 1, 1/(i + 1)},
           {i, 1/(i + 1)}, {i, 1/i}}]}]]];
```

```
Show[t, r]
Out[]=
    - Graphics -
```

输出图形如图 3-9-4 所示。

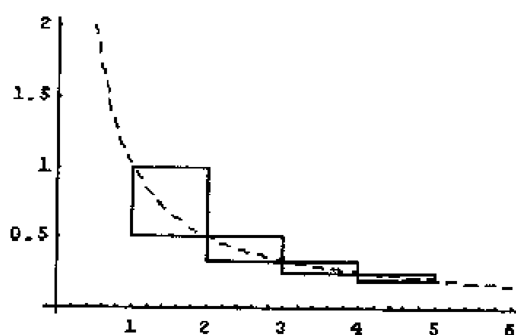


图 3-9-4

设 S_n 是级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{x})dx$ 的部分和，由于 $\int_{k}^{k+1}(\frac{1}{k}-\frac{1}{x})dx$ 等于图形中虚线与第 k 个小矩形的上半部分围成的面积，可见 $\frac{1}{2}<S_n<1$，用 S_n 作为 γ 的近似值，误差 $r<\frac{1}{n+1}$。

下面计算欧拉常数 γ 的近似值。

```
In[]:=n=5000;
    For[i=500,i<=n,i=i+500,
      s=N[Sum[1/j,{j,1,i}]-Log[i+1],10];
      rn=N[1/(i+1),10];
      Print["i=",i,"      s=",s,"      rn=",rn]]
Out[]=
    i=500     s=0.576217    rn=0.00199601
    i=1000    s=0.576716    rn=0.000999001
    i=1500    s=0.576883    rn=0.000666223
    i=2000    s=0.576966    rn=0.00049975
    i=2500    s=0.577016    rn=0.00039984
    i=3000    s=0.577049    rn=0.000333222
    i=3500    s=0.577073    rn=0.000285633
    i=4000    s=0.577091    rn=0.000249938
    i=4500    s=0.577105    rn=0.000222173
    i=5000    s=0.577116    rn=0.00019996
```

因此可以得到 $\gamma\approx 0.577$。

第四篇 高等数学应用实验

实验 4-1 猪肉价格问题

实验的基本理论与方法

1. 数列收敛的概念。

2. 差分方程的求解方法：设差分方程$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$的特征方程$r^2 + pr + q = 0$有两个不相等的根$r_1, r_2$，则差分方程的通解为

$$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

实验指导

一、问题

在市场经济中存在这样的循环现象：若上一年度某产品生产量供过于求，则产品的价格就会降低，而价格降低会使今年的生产量减少，造成供不应求，导致价格上扬；而价格上扬又将使明年产量增加，造成新的供过于求。据统计，某城市 1998 年的猪肉产量为 4×10^{8} kg（40 万吨），肉价为 6.00 元/ kg，1999 年猪肉产量为 3.5×10^{8} kg（35 万吨），肉价为 8.00 元/kg。已知 2000 年的猪肉产量为 3.8×10^{8} kg（38 万吨），若维持目前的消费水平与生产模式，并假定猪肉产量与价格之间是线性关系，问若干年后，猪肉的产量与价格是否会趋于稳定？若能够稳定，试求出稳定的生产量和价格。

二、问题分析

假设第n年猪肉产量为x_n，猪肉价格为y_n，判断若干年后猪肉的产量与价格是否会趋于稳定，以及稳定的产量和价格问题可以归结为判断数列x_n, y_n是否收敛的问题。在收敛的情况下其极限值即为若干年后猪肉的产量及其价格的稳定值。

三、建立模型

由于当年产量确定当年价格，故需求函数为$y_n = f(x_n)$，而当年价格又决定第 2 年的生产量，故供应函数为$x_{n+1} = g(y_n)$。根据问题中的线性假设，设需求函数和供应函数分别为：

$$y_n = ax_n + b, x_{n+1} = cy_n + d, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

于是，由 1998 年、1999 年猪肉的产量和价格，可得

$$\begin{cases}6=40a+b\\8=35a+b\end{cases}$$

解此方程组得 $a=-\frac{2}{5},b=22$ 。

同样，由 1998 年、1999 年的肉价和 1999 年、2000 年的猪肉产量，可得下列方程组

$$\begin{cases}35=6c+d\\38=8c+d\end{cases}$$

解此方程组得 $c=\frac{3}{2},d=26$ 。于是我们得出需求函数和供应函数分别为

$$y_n=-\frac{2}{5}x_n+22,x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+26\quad(n=1,2,\cdots)$$

四、模型求解

下面计算数列 x_n,y_n 的极限。首先，由递推公式

$$y_n=-\frac{2}{5}x_n+22,x_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+26\quad(n=1,2,\cdots)$$

得到

$$x_{n+1}=26+\frac{3}{2}(22-\frac{2}{5}x_n)$$

由此可知

$$\begin{aligned}x_{k+1}-x_k&=-\frac{3}{5}(x_k-x_{k-1})=\\&(-\frac{3}{5})^2(x_{k-1}-x_{k-2})=\cdots=\\&(-\frac{3}{5})^{k-1}(x_2-x_1)\qquad(k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

对 k 从 1 至 n 求和，得

$$x_{n+1}-x_1=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=(x_2-x_1)\sum_{k=1}^{n}(-\frac{3}{5})^{k-1}$$

所以

$$x_{n+1}=x_1+(x_2-x_1)\frac{1-(-\frac{3}{5})^n}{1+\frac{3}{5}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{295}{8}=36.875\text{（万吨）}$$

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(-\frac{2}{5}x_n+22)=7.25\text{（元/kg）}$$

通过以上分析可知，猪肉的价格和产量都会趋于稳定。猪肉产量稳定在年产 36.875 万吨，猪肉价格稳定在 7.25 元/kg。

五、求解程序

本问题可以转化为求解二阶差分方程

$$x_{n+1}-\frac{2}{5}x_n-\frac{3}{5}x_{n-1}=0$$

其特征方程为

$$5r^2-2r-3=0$$

```
In[]:=Clear[x1, x2, r1, r2, c1, c2, solution];
    x1 = 40;x2 = 35;
    solution = Solve[5r^2 - 2r - 3 == 0, r];
    r1 = r /. solution[[1, 1]];
    r2 = r /. solution[[2, 1]];
    c = Solve[{c1*r1 + c2*r2 == x1, c1*r1^2 + c2*r2^2 == x2}, {c1, c2}];
    {c1, c2} = {c1, c2} /. c[[1]];
    Print["xn=(", c1, ")(", r1, ")^n+(", c2, ")(", r2, ")^n"]
Out[]=
```

$$\text{xn=}(-\frac{125}{24})(-\frac{3}{5})\text{^n+}(\frac{295}{8})(1)\text{^n}$$

即

$$x_n=-\frac{125}{24}\left(-\frac{3}{5}\right)^n+\frac{295}{8}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{295}{8}=36.875 \text{（万吨）}$$

实验内容

练习 1　求 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的通项，已知 $F_1=1,F_2=1,\cdots,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。

练习 2　有小兔一对，若第 2 个月它们成年，第 3 个月生下小兔一对，以后每月生产小兔一对。而所生小兔亦在第 2 个月成年，第 3 个月生产小兔一对，以后亦每月生产小兔一对。假定每产一对小兔必为一雌一雄，且均无死亡，问一年后共有小兔多少对？

实验 4-2　抵押贷款与分期付款购物问题

实验的基本理论与方法

银行复利的计算方法。

实验指导

一、问题

小王看到一则广告，称某汽车销售商对汽车实行分期付款销售。一台售价为 10 万元的汽车，只需首付 4 万元，剩余 6 万元可实行分期付款，如果 5 年付清，每月只需 1260 元。另外，小王又得到一则银行贷款的消息，称 10 万元以下的贷款，在 5 年内分期还清，月利率为 5‰。现在小王想买一台上述标价的汽车，应使用该项银行贷款，还是直接向商店分期付款？

二、问题分析

小王做出决策的关键是要计算出：如果通过向银行贷款的方式购买汽车，5 年还清贷款，每月需要还多少钱。

三、建立模型及求解

在求解时需要考虑以下因素：

A_0：贷款金额（60000 元）；　　　R：月利率（按复利计）；

x ：每月还款金额；　　　N：贷款期限。

若用 $A_k,(k=1,2,\cdots,N)$ 表示第 k 个月尚欠的还款金额，则

$$A_1=(1+R)A_0-x$$

$$A_2=(1+R)A_1-x=(1+R)^2A_0-x[(1+R)+1]$$

$$A_N=(1+R)^NA_0-x[(1+R)^{N-1}+(1+R)^{N-2}+\cdots+(1+R)+1]=$$

$$(1+R)^NA_0-x\frac{(1+R)^N-1}{R}$$

令 $A_N=0$，得

$$x=\frac{A_0R(1+R)^N}{(1+R)^N-1}=1159.97$$

由此计算结果可知，如果小王通过向银行贷款的方式买车，每月只需向银行还款 1159.97 元，少于向经销商分期付款的还款金额，所以小王应该通过向银行贷款的方式买车。

四、求解程序

```
In[]:=Clear[a0, n, r, x];
      a0 = 60000; n = 60; r = 0.005;
      x = a0*r*(1 + r)^n/((1 + r)^n - 1)
Out[]=
      1159.97
```

实验内容

练习 1　如果小王按照向汽车经销商分期付款的方式购买汽车，则汽车经销商实际向小王征收了多少利率？

练习 2　如果小王每月只能归还 800 元，选择的利率大小和借期的最佳值是什么？

练习 3　小王又看到某借贷公司的一则广告：本公司可以在不增加还款金额的情况下，帮你提前还清欠款。若借款 6 万元，5 年还清，只要预付 3600 元的保证金，之后每半个月还 600 元，本公司即可帮助你提前一年还清借款。这则广告看上去是很诱人的，请你帮助小王分析一下，这家公司是慈善机构还是仍然以赚钱为目的。

实验 4-3　同步通讯卫星的覆盖面积问题

实验的基本理论与方法

对面积的曲面积分的概念及其计算方法。

实验指导

一、问题

目前，人类在同步轨道上已经发射了 100 多颗通讯卫星。这些卫星作为“中继站”，不断地向地球传送信息。要实现地球上任意两点间的通讯传输，问至少需要这样的卫星多少颗？

二、问题分析

地球同步通讯卫星的轨道位于地球的赤道平面内，且可近似认为是圆形轨道。由于卫星是与地球同步运行的，所以卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同$(\omega=\frac{2\pi}{24\times3600})$。假定地球的半径$R=6.4\times10^6\,\text{m}$，问题转化为计算卫星距地面的高度，进而计算卫星的覆盖面积，最后确定卫星的颗数。

三、建立模型

假设卫星距地面的高度为h，地球和卫星的质量分别为M,m，于是由万有引力定律，卫星所受到的引力为$G\frac{Mm}{(R+h)^2}$，其中G为万有引力常数。于是，由牛顿定律有

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=m\omega^2(R+h)$$

亦即
$$(R+h)^3=\frac{GM}{\omega^2}=\frac{GM}{R^2}\frac{R^2}{\omega^2}=g\frac{R^2}{\omega^2}$$

其中，$g=9.8$为重力加速度常数。因此

$$h=\left(g\frac{R^2}{\omega^2}\right)^{1/3}-R$$

此时卫星覆盖的面积为$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$，其中，$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq0)$被圆锥面（圆锥$\alpha$）所截得的部分，如图 4-3-1 所示。

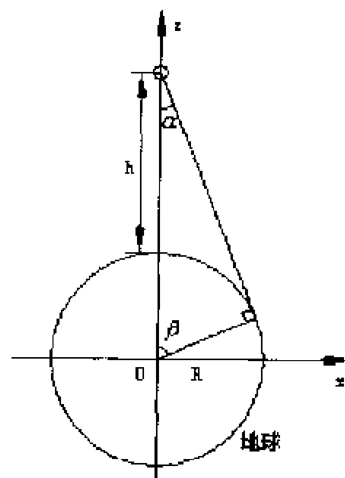


图 4-3-1

四、模型求解

由于Σ在XOY平面上的投影区域为$D: x^2+y^2 \le R^2\sin\beta$（$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$），因此

$$A=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\theta}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r=$$
$$2\pi R^2(1-\cos\beta)$$

由于$\cos\beta=\sin\alpha=\frac{R}{R+h}$，故

$$A=4\pi R^2\frac{h}{2(R+h)}=Sk$$

这里S为地球的表面积，$k=\frac{h}{2(R+h)}$为卫星覆盖面积与地球表面积的比例系数。将$R=6.4\times10^6$，$g=9.8$，$\omega=\frac{2\pi}{24\times3600}$代入，可依次计算出$h=3.6\times10^7, k=0.424$，即一颗卫星可以覆盖地球表面积的42.4%，使用3颗相间$\frac{2\pi}{3}$的卫星可以覆盖全部地球表面。

五、求解程序

```
In[]:=R = 6.4*10^6;
      w = 2*Pi/(24*3600); g = 9.8;
      h = (g*R^2/w^2)^(1/3) - R
      k = h/2/(R + h)
Out[]=
      3.594×10^7
      0.424421
```

实验内容

练习1　一横截面积为常数A，高为H的水池内盛满了水，由池底一横截面积为B的小孔放水。设水从小孔流出的速度为$v=\sqrt{2gh}$，求池中水面高度与时间的关系和水放空所需的时间。

练习2　一圆柱形容器内充满了水，若以角速度ω绕其中心轴旋转，问在稳态情况下液面的形状是怎样的。

实验 4-4　核废料的处理问题

实验的基本理论与方法

常微分方程理论的应用。

实验指导

一、问题

以前，美国原子能委员会将放射性核废料装在密封的圆桶里扔到水深约 90 m 的深海里。生态学家和科学家担心这种做法不安全而提出疑问。原子能委员会向他们保证：圆桶决不会破漏。经过周密的试验，证明圆桶的密封性是很好的。但工程师们又问：圆桶是否会因与海底碰撞而发生破裂？原子能委员会说：决不会。但工程师们不放心。他们进行了大量的试验后发现：当圆桶的速度超过 12.2 m/s 时，圆桶会因碰撞而破裂。那么圆桶到达海底时的速度到底是多少呢？它会因碰撞而破裂吗？下面是一些真实而具体的数据，请你根据这些具体数据解决这个问题。

已知圆桶的质量 $m = 239.46\text{kg}$ ，海水密度 $\rho = 1035.71\text{kg/m}^3$ ，圆桶的体积 $V = 0.2058\,\text{m}^3$ 。另外，工程师们做了大量牵引试验后得出结论：圆桶下沉时的阻力与圆桶的方位大致无关，而与下沉的速度成正比，比例系数 $k = 0.6$ 。

二、问题分析

只要找出圆桶的运动规律，即可判断出这样处理核废料的方法是否安全。

三、建立模型

圆桶在运动过程中所受到的作用力包括：圆桶所受的重力 G 、水的浮力 F 和水的阻力 f 。

设圆桶的位移函数为 $s = s(t)$ ，速度函数为 $v = v(t)$ ，由牛顿运动定律得圆桶的位移和速度满足如下的微分方程：

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = G - F - f = mg - \rho g V - k\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v|_{t=0} = 0 \\ s|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = G - F - f = mg - \rho gV - kv \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

根据方程（1），（2）解出圆桶的位移函数 $s(t)$ 和速度函数 $v(t)$ 。令 $s(t)=90$ ，求出圆桶落入海底所需的时间 t_0 ，则 $v(t_0)$ 即为圆桶落入海底时的速度。这样就可以判断出这种处理核废料的方式是否安全。

四、求解程序

```
In[]:=m=239.46;u=0.2058;g=9.8;p =1035.71;k=0.6;
     st=Dsolve[{m*s"[t]==m*g-p*g*u-k*s'[t],s[0]==0,s'[0]==0},s[t],t]
                                        (*求位移函数*)
Out[]=
     {{s[t] → -171511. + 171511. e^(-0.00250564 t) + 429.744 t}}
In[]:=vt=Dsolve[{m*v'[t]==m*g-p*g*u-k*v[t]*v[t],v[0]==0},v[t],t] (*求速度函数*)
Out[]=
{{v[t] → 9.00831×10^-8 e^(-0.00250564 t) (-4.77054×10^9 + 4.77054×10^9 e^(0.00250564 t))}}
In[]:= FindRoot[90==4259.744t+171511.*Exp[-0.00250564t-171511.,{t,13}]]
                                        (*求出圆桶落入海底所需的时间*)
Out[]=
     {t → 13.0002}
In[]:= v[13.002]                        (*求出圆桶落入海底时的速度*)
Out[]=
     {{v[13.002] → 13.7747}}
```

求出圆桶落入海底时的速度 $v=13.77\,\text{m/s}$。显然此时圆桶的速度已经超过 12.2m/s，因此可以得出结论：这种处理核废料的方法不安全。

实验内容

练习 1　若将圆筒沉入深度为 85m 的海水中，情况如何？

练习 2　假设水的阻力与速度的平方成正比：$f=kv^2$，并仍设 $k=0.6$，这时速度与时间的关系如何？并求出当速度不超过 12.2m/s，圆桶的运动时间和位移应不超过多少？

实验 4-5　最优存储问题

实验的基本理论方法

一元函数极值的概念与求法。

实验指导

一、背景介绍

在物资的供应过程中，由于到货与销售不可能做到同步，故总要保持一定的库存储备。但如果库存过多，就会造成一定的积压浪费以及存储费用的上升；如果库存过少，又会造成由于缺货而失去销售机会，使利润减少。因此，如何选择库存和订货策略是一个需要研究的问题。

二、问题

某自行车商店平均每天销售自行车 20 辆，已知每辆自行车每天的保管费为 0.75 元，每次的订货费为 75 元，如果商店不允许缺货并且每次订货均可立即补充，请为经销商做出最佳决策：隔多长时间进货一次，每次进货量为多少。

三、问题分析

在求解时需要考虑的费用有以下两项：

（1）进货费用：包括两项，一项是订购费用 K 元（固定费用），另一项是货物的成本费用 c 元/辆，它与订货数量有关（是可变费用）。

（2）单位时间的存储费用：h 元/辆。

所谓最佳决策就是使每天所花费的总费用最少。根据上面的分析，我们知道总费用 $T=T_1+T_2$，其中 T_1 为进货费用，T_2 为存储费用。

四、建立模型

假定每隔 t 天进一次货，每次订货量为 Q，由于不允许缺货，则订货量必须满足 t 时间的需求，即 $at=Q$，于是每次的进货费用为 $K+cat$，平均每天的进货费用为

$$T_1=\frac{K}{t}+ca$$

又每天的平均存储量为 $\frac{1}{t}\int_0^t aT\mathrm{d}T=\frac{1}{2}at$，于是每天的平均存储费用

$$T_2=\frac{1}{2}ath$$

每天总的平均费用

$$T(t)=\frac{K}{t}+ca+\frac{1}{2}ath$$

五、问题求解

由微积分求最小值的方法可求出函数$T(t)=\frac{K}{t}+ca+\frac{1}{2}ath$的最小值点

$$t_0=\sqrt{\frac{2K}{ha}}$$

即每隔t_0时间进一次货，可使费用$T(t)$最小。

订货批量 $$Q_0=at_0=\sqrt{\frac{2aK}{h}}$$

代入数值 $$t_0=\sqrt{\frac{2\times75}{0.75\times20}}=3.1623\text{（天）}$$

$$Q_0=63.246\text{（辆）}$$

六、求解程序

```
In[]:=Clear[m, t, diff];
    m[t_] := k/t + c a + 1/2 a t h;
    diff = D[m[t], t];
    Solve[diff == 0, t]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{t\to-\frac{\sqrt{2}\sqrt{k}}{\sqrt{a}\sqrt{h}}\right\},\left\{t\to\frac{\sqrt{2}\sqrt{k}}{\sqrt{a}\sqrt{h}}\right\}\right\}$$

实验内容

练习　某自行车商店的仓库管理人员采取一种简单的订货策略，当库存降低到P辆自行车时，就向厂家订货，每次订货Q辆，假设商店不允许缺货，但如果库存量过多，将会导致资金积压和保管费增加。若现在已有如表4-3-1所示的5种库存策略，试比较选择1种策略以使所花费用最少。

表4-5-1　库存策略

方案编号	重新订货点P / 辆	重新订货量Q / 辆
方案1	125	150
方案2	125	250
方案3	150	250
方案4	175	250
方案5	175	300

问题的已知条件如下:

(1) 从发出订货到收到订货需要 3 天;

(2) 每辆自行车的保管费为 0.75 元/天，每次的订货费为 75 元;

(3) 每天自行车的需求量平均为 20 辆;

(4) 原始库存为 115 辆，并假设第 1 天没有发出订货。

实验 4-6　广告费用与利润问题

实验的基本理论方法

多元函数极值理论、数据的曲线拟合、最小二乘法。

实验指导

一、背景介绍

为了尽快收回资金并获得较多的利润，商品生产厂家和经销商通常将广告作为产品促销的重要手段。投入一定的广告费后，产品的销售量将有一个增长，销售增长量可以由销售增长因子表示。例如，投入 3 万元的广告费，销售增长因子为 1.85，即销售量将是预期销售量的 1.85 倍。虽然说，商品的销售速度是因为作广告而增加的，但这种增加是有一定限度的，当商品在市场上趋于饱和时，销售速度将趋于它的极限值，当速度达到它的极限值时，无论再以何种形式做广告，销售速度都将减慢。因此，对于某种商品而言，如何确定其广告费用是生产厂家和经销商需要研究的问题。

二、问题

某公司生产一种耐用消费品，每件产品的生产成本为 2 元，产品上市之前，该公司对同类产品的售价与市场销售量进行了市场调研，预测出该产品的售价与预期销售量关系如表 4-6-1 所示。

表 4-6-1　产品的售价与预期销售量关系表

售价/元	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
预期销售量/千桶	41	38	34	32	29	28	25	22	20

为尽快收回资金并获得利润，产品一上市，该公司即开始做广告。经过一段时间的市场跟踪调查之后，预测出该产品的广告费与销售增长因子的关系如表 4-6-2 所示。

表 4-6-2　产品的广告费与销售增长因子的关系表

广告费/元	0	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	60 000	70 000
销售增长因子	1.00	1.40	1.70	1.85	1.95	2.00	1.95	1.80

根据以上预测结果，请你为该公司决策：该产品的广告费用和销售价格为多少时，预期利润最大？

三、问题分析

在求解时需要考虑的因素包括：

c：单位产品的生产成本；　　x：预期销售量；

y：产品售价；　　z：广告费；

s：实际销售量；　　k：销售增长因子；

P：销售利润。

由于

利润=销售收入—产品生产成本—广告费

所以，问题转化为将利润 P 表示为产品售价 y 和广告费用 z 的函数，即求出 $P=P(y,z)$ 的表达式，然后用微积分的知识求出 $P(y,z)$ 的极值点即可。

四、建立模型并求解

根据表 4-6-1 给出的数据绘图（见图 4-6-1），确定出预期销售量 x 与产品售价 y 之间的函数关系为线性关系。

设

$$x=ay+b$$

其中，a,b 为待定常数。通过表 4-6-1 给出的数据用最小二乘法进行直线拟合，得出

$$a=-5133, b=50422$$

根据表 4-6-2 给出的数据绘图（见图 4-6-2），确定出销售增长因子 k 与广告费 z 之间的函数关系为二次函数关系。

设

$$k=dz^2+ez+f$$

其中，d,e,f 为待定常数，通过表 4-6-2 给出的数据用最小二乘法进行二次曲线拟合，得出

$$d=-4.256\times10^{-10}, e=4.092\times10^{-5}, f=1.019$$

于是

$$\begin{aligned}P(y,z)&=sy-sc-z=\\&s(y-c)-z=\\&kx(y-c)-z=\\&(dz^2+ez+f)(ay+b)(y-c)-z\end{aligned}$$

要求利润的最大值，也就是要求函数 $P=P(y,z)$ 的极值。令 $\frac{\partial P}{\partial y}=0, \frac{\partial P}{\partial z}=0$ 得方程组

$$\begin{cases}(dz^2+ez+f)(2ay+b-ac)=0\\(2dz+e)(ay+b)(y-c)=0\end{cases}$$

解之得

$$y=\frac{ac-b}{2a}, z=\frac{1}{2d(ay+b)(y-c)}-\frac{e}{2d}$$

将 a,b,c,d,e,f 的值代入，得

$$y=6.04, z=33113$$

由上面的计算可知，当每单位产品销售价为 6.04 元时，投入 33113 元的广告费后，所获得利润最大，为 116875 元。

五、求解程序

（1）绘图程序及图形（见图 4-6-1 和图 4-6-2）：

```
In[]:=Clear[a,b];
    a = {{2., 41000}, {2.5, 38000}, {3., 34000}, {3.5, 32000}, {4., 29000},
         {4.5, 28000}, {5., 25000}, {5.5, 22000}, {6, 20000}};
    b = {{0, 1.}, {10000, 1.4}, {20000, 1.7}, {30000, 1.85}, {40000,
         1.95}, {50000, 2.}, {60000, 1.95}, {70000, 1.8}};
    ListPlot[a, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[1, 0, 0]}]
    ListPlot[b, PlotStyle -> {PointSize[0.02], RGBColor[1, 0, 0]}]
Out[]=
    - Graphics -
```

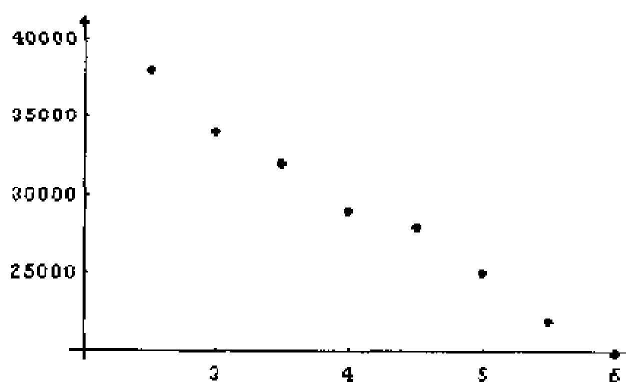


图 4-6-1

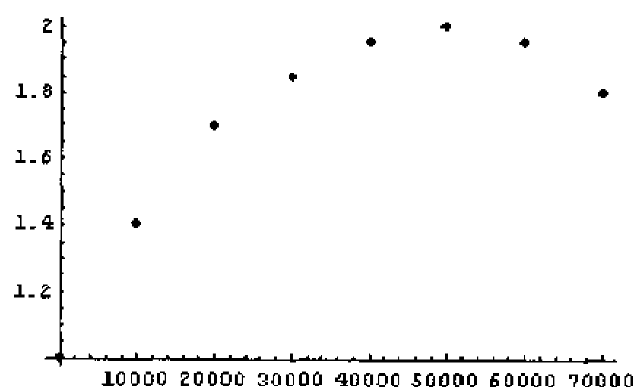


图 4-6-2

（2）数据拟合程序：

```
In[]:=a = {{2., 41000}, {2.5, 38000}, {3., 34000}, {3.5, 32000}, {4., 29000}, {4.5, 28000},
           {5., 25000}, {5.5, 22000}, {6, 20000}};
    Fit[a, {1, y}, y]
Out[]=
     50422.2 - 5133.33 y
In[]:=b= {{0, 1.}, {10000, 1.4}, {20000, 1.7}, {30000, 1.85}, {40000, 1.95},
          {50000, 2.}, {60000, 1.95}, {70000, 1.8}};
    Fit[a, {1, y, y^2}, y]
Out[]=
```

$1.01875 + 0.0000409226\, y - 4.25595\times10^{-10}\, y^2$

（3）极值点的求解过程：

```
In[]:=Clear[y, z, a, b, c, d, e, f, p, t];
    a = -5133; b = 50420; c = 2; d = -4.256*10^(-10); e = 4.092*10^(-5); f = 1.019;
    p[y_, z_] := (d*z^2 + e*z + f)*(a*y + b)*(y - c) - z;
    t = Solve[{D[p[y, z] == 0, y], D[p[y, z] == 0, z]}, {y, z}]
Out[]=
```

$\{\{y\to -1.15843\times10^{6},\ z\to -20522.\},$
$\{y\to -18.4117,\ z\to 116669.\},\ \{y\to -18.4117,\ z\to 116669.\},$
$\{y\to 6.04133,\ z\to 33112.9\},\ \{y\to 1.15844\times10^{6},\ z\to -20522.\}\}$

实验内容

练习 表 4-6-3 是历史上关于彩漆价格与销售量关系的一份详细记录。假定产品的广告费与销售增长因子的关系仍如表 4-6-2 所示，试确定该产品的广告费用和销售价格，使得预期利润最大。

表 4-6-3 彩漆价格与销售量关系表

售价/元	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00
预期销售量/桶	40 719	37 727	34 856	32 106	29 477	26 969	25 482	22 316	20 171

实验 4-7　生产计划问题

实验的基本理论方法

线性规划的基本方法和理论。

实验指导

一、问题

某工厂计划用 m 种资源生产 n 种产品。假设生产单位个第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 种产品所需要的第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 种资源量为 a_{ij}，第 i 种资源的可用量为 b_i，而生产单位个第 j 种产品所产生的利润为 c_j。试问：怎样组织生产，可使工厂获得最大的利润。

二、建立模型

设第 j 种产品的生产量为 x_j，则可建立数学模型。

求一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足约束条件

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j \\ x_j \ge 0\end{cases},\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

并使函数

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$$

达到最大值。这是一个线性规划模型，通常写成

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j \\ x_j \ge 0\end{cases},\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

例如，当 $m=n=2$，$b_1=180$，$b_2=150$，$a_{11}=2$，$a_{21}=3$，$a_{22}=2$，$a_{12}=4$，$c_1=4$，

$c_2=6$时，数学模型为

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 180 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 150 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

这是一个线性规划模型。线性规划模型的一般形式为

$$\min Z = cx$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} mx \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

三、模型求解

运用命令 **LinearProgramming[*c*, *m*, *b*]** 或 **ConstrainedMin[*f*, {*inequalities*},{ *x*, *y*, …}]**可以直接求出结果。例如，输入

```
In[]:=LinearProgramming[{-4, -6}, {{-2, -4}, {-3, -2}}, {-180, -150}]
Out[]=
    {30, 30}
```

即可得出结果。

实验内容

练习 1　某昼夜服务的公交线路每天各时段所需司售人员数目如表 4-7-1 所示。

表 4-7-1　各时段所需司售人员数目

班次	时间段	所需人数
1	6：00—10：00	60
2	10：00—14：00	70
3	14：00—18：00	60
4	18：00—22：00	50
5	22：00—2：00	20
6	2：00—6：00	30

若司售人员分别在各时段一开始上班，并连续工作 8 小时，问该公交线路应该配备多少工作人员。

练习 2　某车间有一批长度为 7.4 m 的同型钢管，因生产需要，需将其截成长为 2.9m、2.1m 和 1.5m 三种不同长度的管料。若三种管料各需 100 根，应如何下料，才能使用料最省？

实验 4-8　安全渡河问题

实验的基本理论方法

集合及运算。

实验指导

一、问题

3 名商人各带 1 名随从，要乘一只最多能容纳两人的小船渡河。随从们密约，无论在河的此岸或者彼岸，一旦他们的人数多于商人的人数，就杀人越货，但如何渡河则由商人确定。请为商人们确定安全的渡河方案。

二、建立模型

这是一个智力游戏问题，而且已经理想化了，因此不必做更多的假设。虽然经过一番逻辑思考可以得到正确的方案，但为了便于编程求解，同时也为了便于推广，我们把上面的问题转化为一个状态转移问题。

设 x,y 分别表示此岸的商人和随从的数目 $(x,y=0,1,2,3)$，则此岸的状态可表示为 $s=(x,y)$。显然，此岸和彼岸都安全的状态集合（称为允许状态集合）为

$$S=\{(x,y)\mid x=0;x=3;x=y=1,2\}$$

乘船方案叫做决策，用 $d=(u,v)$ 来表示，显然允许，决策集合为

$$D=\{(u,v)\mid u+v=1,2\}$$

小船由此岸到彼岸或由彼岸到此岸的每一次航行，都造成状态的一次转移。当 k 为奇数时，小船由此岸到彼岸，此岸的人数减少；当 k 为偶数时，小船由彼岸回到此岸，此岸的人数增加，因此，状态转移规律为

$$s_{i+1}=s_i+(-1)^i d_i$$

于是安全渡河问题归结为如下的数学问题：求决策 $d_i\in D(i=1,2,\cdots)$，使状态 $s_i\in S$，按照状态转移规律，由初始状态 $s_1(3,3)$，经过有限次转移达到 $s_n(0,0)$，当然 n 越小越好。

三、求解程序

```
In[]:=s1=Table[{0,i},{i,0,3}];
    s2=Table[{3,j},{j,0,3}];
    s3=Table[{k,k},{k,1,2}];
    s=Union[s1,s2,s3];                (* 定义允许状态集合*)
    d={{0,2},{2,0},{1,1},{1,0},{0,1}};    (* 定义允许决策集合*)
```

```
ls=Length[s];                                    (*计算允许状态集合元素个数*)
ld=Length[d];
For[i=1,i<=ls,i++,a[i]=Part[s,i]];
For[j=1,j<=ld,j++,b[j]=Part[d,j]];
i=1;j=1;ss[1]={3,3};
Do[
    Do[ss[i+1]=ss[i]+(-1)^i*b[j];
    t=0;
    If[MemberQ[s,ss[i + 1]], t = 1];
    If[t == 0, Continue[]]; (* 判断是否属于允许状态集合*)
    v=Mod[i+1,2];m=v;u=0;
    If[i+1>=3,
      Do[If[ss[i+1]==ss[m],u=1;Break[]],{m,v,i-1,2}]];
    If[u==0,c[i+1]=b[j];Break[]],{j,1,ld}] (* 判断是否重复*)
    If[t==0,Print["No result"]; Break[]];
    Print[i," ",ss[i], "-----------------", c[i+1], "--------------→",ss[i+1]];
    If[ss[i+1]=={0,0},Break[]],{i,1,12}
  ]
Out[]=
     1  {3, 3}-----------{0, 2}----------->{3, 1}
     2  {3, 1}-----------{0, 1}----------->{3, 2}
     3  {3, 2}-----------{0, 2}----------->{3, 0}
     4  {3, 0}-----------{0, 1}----------->{3, 1}
     5  {3, 1}-----------{2, 0}----------->{1, 1}
     6  {1, 1}-----------{1, 1}----------->{2, 2}
     7  {2, 2}-----------{2, 0}----------->{0, 2}
     8  {0, 2}-----------{0, 1}----------->{0, 3}
     9  {0, 3}-----------{0, 2}----------->{0, 1}
     10  {0, 1}-----------{0, 1}----------->{0, 2}
     11  {0, 2}-----------{0, 2}----------->{0, 0}
```

这说明经过 11 步就能达到安全渡河的目的。具体方案如下(从此岸观察):

（3 商人,3 随从） $\xrightarrow{\text{去2随从}}$ （3 商人,1 随从） $\xrightarrow{\text{回1随从}}$ （3 商人,2 随从） $\xrightarrow{\text{去2随从}}$

（3 商人,0 随从） $\xrightarrow{\text{回1随从}}$ （3 商人,1 随从） $\xrightarrow{\text{去2商人}}$ （1 商人,1 随从） $\xrightarrow{\text{回1商人1随从}}$

（2 商人,2 随从） $\xrightarrow{\text{去2商人}}$ （0 商人,2 随从） $\xrightarrow{\text{回1随从}}$ （0 商人,3 随从） $\xrightarrow{\text{去2随从}}$

（0 商人,1 随从） $\xrightarrow{\text{回1随从}}$ （0 商人,2 随从） $\xrightarrow{\text{去2随从}}$ （0 商人,0 随从）（安全渡河）。

当然渡河的方案并不惟一。另外，本题也可以用图解的方法来解决。

实验内容

练习 1　在上述条件下，当商人的数目为 4 时(随从数目也为 4)，商人们能否安全渡河?

练习 2　考虑一般的问题，若商人的数目为 m，小船最多只能容纳 $n(1<n<m)$ 人（船上也会发生杀人越货的情况)，当 m 和 n 满足怎样的条件，商人们才能实现安全渡河?

实验 4-9 基因分布问题

实验的基本理论方法

矩阵的特征值、特征向量的概念以及计算方法。

实验指导

一、问题

为了揭示生命的奥秘，人们越来越重视遗传特征的诸代传播问题。在常染色体的遗传中，任何生命的后代都会从每个父本的基因对中各继承一个基因，形成自己的基因对（也称为基因型）。

假设所考虑的遗传特性是由 A, a 控制的，那么就有 3 种基因对，即 AA, Aa, aa 。例如，金鱼草有两个遗传基因决定他的花的颜色，基因型是 AA 的金鱼草开红花，基因型是 Aa 的金鱼草开粉花，而基因型是 aa 的金鱼草开白花。表 4-9-1 是某种植物父本基因型的所有可能的组合以及后代形成每种基因型的概率。我们的问题是，如果计划采用 AA 型的植物与每种基因型植物相结合的方式培育后代，经过若干次遗传后，后代的 3 种基因分布如何。

表 4-9-1 某种植物父本基因型的组合及后代形成概率

		父体-母体的基因型					
		$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
后代基因型	AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
	Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

二、建立模型

设 $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ 分别表示第 n 代植物中基因型为 AA, Aa, aa 的植物占总植物的百分率，第 n 代植物的基因分布向量

$$x(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))^{\mathrm{T}}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

而且

$$x_1(n)+x_2(n)+x_3(n)=1\,,\quad n=0,1,2,\cdots$$

由表 4-9-1 和关于培育方式的假定知

$$x_1(n)=x_1(n-1)+\frac{1}{2}x_2(n-1)$$

$$x_2(n)=\frac{1}{2}x_2(n-1)+x_3(n-1)$$

$$x_3(n)=0,\qquad n=1,2,\cdots$$

若令

$$L=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

则上式可以表示为

$$x(n+1)=\mathrm{L}x(n),\qquad n=1,2,\cdots$$

因此，

$$x(n)=\mathrm{L}^n x(0),\qquad n=0,1,2,\cdots$$

为了计算 L^n，可以利用线性代数中对角化的方法，即求出可逆矩阵 P，使 $P^{-1}LP=D$ 为对角矩阵，从而 $L^n=PD^nP^{-1}$。

三、求解程序

```
In[]:=L = {{1, 1/2, 0}, {0, 1/2, 1}, {0, 0, 0}};
    {p, d} = JordanDecomposition[L];
    p1 = Inverse[p];
    p. MatrixPower[d, n].p1;
    MatrixForm[%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix}1 & 1-2^{-n} & 1+0^{n}-2^{1-n}\\ 0 & 2^{-n} & -2\,0^{n}+2^{1-n}\\ 0 & 0 & 0^{n}\end{pmatrix}$$

即

$$L^n=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1-2^{-n} & 1+2^{-(n-1)}\\ 0 & 2^{-n} & 2^{-(n-1)}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&x_1(n) = x_1(0) + (1-2^{-n})x_2(0) + (1-2^{-n+1})x_3(0)\\
&x_2(n) = 2^{-n}x_2(0) + 2^{-n+1}x_3(0)\\
&x_3(n) = 0, \qquad n = 1,2,\cdots
\end{aligned}
$$

由此即知当$n \to \infty$时，$x_1(n) \to 1, x_2(n) \to 0, x_3(n) \to 0$。这说明在极限状态下，所有植物的基因都会呈现$AA$型。

实验内容

练习 1　在上述问题中，若不选用AA型的植物与每种基因型植物相结合的方式培育后代，经过若干次遗传后，后代的3种基因分布如何？

练习 2　讨论常染色体隐性疾病遗传问题。假设某种遗传病对应的基因型将人口分为3类：AA型基因对的正常人，Aa型基因对的隐性患者，aa型基因对的显性患者。又假定，初始时（第0代）这3种人占总人口的比例为a_0, b_0, c_0，而且不准显性患者结合产生后代，求经过若干代遗传后，3种人口的分布如何？

第五篇 线性代数实验

实验 5-1 矩阵与向量的运算

实验目的

掌握用 Mathematica 进行矩阵和向量运算的方法。

实验的基本理论与方法

1. 向量的运算。
2. 矩阵的运算、矩阵可逆的条件、逆矩阵的计算方法。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **A+B, (A-B)**：矩阵或向量的加减法。
2. **c*A**：数与矩阵相乘。
3. **A.B**：矩阵与矩阵相乘。
4. **Det[A]**：求 A 的行列式。
5. **Transpose[A]**：求 A 的转置。
6. **Inverse[A]**：求 A 的逆矩阵。
7. **Array[a,{m,n}]**：定义 $m\times n$ 矩阵。
8. **IdentityMatrix[n]**： n 阶单位矩阵。
9. **MatrixPower[A, n]**：求 A 的 n 次幂。
10. **Minors[A,k]**：以 A 的 k 阶子式为元素所做成的矩阵。

实验指导

例 5.1.1 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $3AB-2A$ 及 $A^{T}B,|A|,A^{-1}$。

（1）定义矩阵 A,B 。

```
In[]:=Clear[A, B];
```

```
A = Array[a, {3, 3}];
a[1, 1] = 1; a[1, 2] = 1; a[1, 3] = 1;
a[2, 1] = 1; a[2, 2] = 1; a[2, 3] = -1;
a[3, 1] = 1; a[3, 2] = -1; a[3, 3] = 1;
A
Out[]=
{{1, 1, 1}, {1, 1, -1}, {1, -1, 1}}
In[]:=B = Array[b, {3, 3}];
b[1, 1] = 1; b[1, 2] = 2; b[1, 3] = 3;
b[2, 1] = -1; b[2, 2] = -2; b[2, 3] = 4;
b[3, 1] = 0; b[3, 2] = 5; b[3, 3] = 1;
B
Out[]=
{{1, 2, 3}, {-1, -2, 4}, {0, 5, 1}}
```

（2）计算$3AB-2A$。

```
In[]:=3A.B - 2A
Out[]=
{{-2, 13, 22}, {-2, -17, 20}, {4, 29, -2}}
```

（3）计算$A^{T}B$。

```
In[]:=Transpose[A].B
Out[]=
{{0, 5, 8}, {0, -5, 6}, {2, 9, 0}}
```

（4）计算$|A|$。

```
In[]:=Det[A]
Out[]=
-4
```

（5）计算A^{-1}。

```
In[]:=Inverse[A]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}\right\}$$

还可以用如下的方法求A^{-1}：

```
In[]:=Minors[A, 2]/Det[A];
    MatrixForm[%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

可见

$$3AB-2A=\begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix},\quad A^{T}B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix},\quad |A|=-4,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

例 5.1.2 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，计算矩阵 $A^{T},(AB)^{T},B^{T}A^{T}$。

（1）定义矩阵 A,B。

```
In[]:=Clear[A, B, a, b];
    A = Array[a, {2, 4}];
    a[1, 1] = 2; a[1, 2] = 1; a[1, 3] = 4; a[1, 4] = 0;
    a[2, 1] = 1; a[2, 2] = -1; a[2, 3] = 3; a[2, 4] = 4;
    B = Array[b, {4, 3}];
    b[1, 1] = 1; b[1, 2] = 3; b[1, 3] = 1;
    b[2, 1] = 0; b[2, 2] = -1; b[2, 3] = 2;
    b[3, 1] = 1; b[3, 2] = -3; b[3, 3] = 1;
    b[4, 1] = 4; b[4, 2] = 0; b[4, 3] = -2;
```

（2）计算 A^{T}。

```
In[]:=Transpose[A]
    MatrixForm[%]
Out[]=
    {{2, 1}, {1, -1}, {4, 3}, {0, 4}}
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

（3）计算 $(AB)^{T}$。

```
In[]:=Transpose[A.B]
Out[]=
    {{6, 20}, {-7, -5}, {8, -6}}
```

（4）计算 B^TA^T。

```
In[]:=Transpose[B] .Transpose[A]
Out[]=
    {{6, 20}, {-7, -5}, {8, -6}}
```

可见，$A^T=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\4&3\\0&4\end{pmatrix}$，$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}6&20\\-7&-5\\8&-6\end{pmatrix}$。

例 5.1.3 求解矩阵方程。

（1）$X\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$。

由 $XA=B$，可得 $X=BA^{-1}$。先定义矩阵 A,B。

```
In[]:=Clear[A, B, a, b];
    A = Array[a, {3, 3}];
    a[1, 1] = 2; a[1, 2] = 1; a[1, 3] = -1;
    a[2, 1] = 2; a[2, 2] = 1; a[2, 3] = 0;
    a[3, 1] = 1; a[3, 2] = -1; a[3, 3] = 1;
    B = Array[b, {2, 3}];
    b[1, 1] = 1; b[1, 2] = -1; b[1, 3] = 3;
    b[2, 1] = 4; b[2, 2] = 3; b[2, 3] = 2;
```

再计算 BA^{-1}。

```
In[]:=B.Inverse[A]
Out[]=
```

$$\left\{\{-2, 2, 1\}, \left\{-\frac{8}{3}, 5, -\frac{2}{3}\right\}\right\}$$

即

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$。

由 $AXB=G$，可得 $X=A^{-1}GB^{-1}$。先定义矩阵 A,B：

```
In[]:=Clear[A, B, a, b, G];
    A = Array[a, {3, 3}];
```

```
a[1, 1] = 0; a[1, 2] = 1; a[1, 3] = 0;
a[2, 1] = 1; a[2, 2] = 0; a[2, 3] = 0;
a[3, 1] = 0; a[3, 2] = 0; a[3, 3] = 1;
B = Array[b, {3, 3}];
b[1, 1] = 1; b[1, 2] = 0; b[1, 3] = 0;
b[2, 1] = 0; b[2, 2] = 0; b[2, 3] = 1;
b[3, 1] = 0; b[3, 2] = 1; b[3, 3] = 0;
G = Array[c, {3, 3}];
c[1, 1] = 1; c[1, 2] = -4; c[1, 3] = 3;
c[2, 1] = 2; c[2, 2] = 0; c[2, 3] = -1;
c[3, 1] = 1; c[3, 2] = -2; c[3, 3] = 0;
```

再计算 $A^{-1}GB^{-1}$。

```
In[]:=Inverse[A].G.Inverse[B]
Out[]=
    {{2, -1, 0}, {1, 3, -4}, {1, 0, -2}}
```

即
$$X = A^{-1}GB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

例 5.1.4 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$AB = A + 2B$，求 B。

由 $AB = A + 2B$，可得 $B = (A - 2E)^{-1}A$。

先定义矩阵 A。

```
In[]:=Clear[A, B, a, b];
    A = {{0, 3, 3}, {1, 1, 0}, {-1, 2, 3}};
```

再计算矩阵 B。

```
In[]:=B = Inverse[A - 2IdentityMatrix[3]].A
Out[]=
    {{0, 3, 3}, {-1, 2, 3}, {1, 1, 0}}
```

得到
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例 5.1.5 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，求$|A|^3$，$|A^3|$，及$A^4$。

定义矩阵 A。

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{3, 4, 0, 0}, {4, -3, 0, 0}, {0, 0, 2, 0}, {0, 0, 2, 2}};
```

计算$|A|^3$。

```
In[]:=Det[A]^3
Out[]=
    -1000000
```

计算$|A^3|$。

```
In[]:=Det[A.A.A]
Out[]=
    -1000000
```

计算A^4。

```
In[]:=MatrixPower[A, 4]
Out[]=
    {{625, 0, 0, 0}, {0, 625, 0, 0}, {0, 0, 16, 0}, {0, 0, 64, 16}}
```

可见，$|A|^3=|A^3|=-1000000$，$A^4=\begin{pmatrix}625&0&0&0\\0&625&0&0\\0&0&16&0\\0&0&64&16\end{pmatrix}$。

例 5.1.6 设 $\boldsymbol{a}_1=(2,5,1,3),\boldsymbol{a}_2=(10,1,5,10),\boldsymbol{a}_3=(4,1,-1,1)$，

（1）求$3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$。

```
In[]:=3a1 + 2a2 - a3 /. {a1 -> {2, 5, 1, 3}, a2 -> {10, 1, 5, 10},
                        a3 -> {4, 1, -1, 1}}
Out[]=
    {22, 16, 14, 28}
```

即

$$3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=(22,16,14,28)$$

（2）若$3(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a})=5(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a})$，求$\boldsymbol{a}$。

先解含$\boldsymbol{a}$ 的代数方程。

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3, a];
    t = Solve[3(a1 - a) + 2(a2 + a) == 5(a3 + a), a]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{a\to\frac{1}{6}(3\,a1+2\,a2-5\,a3)\right\}\right\}$$

再将a_1, a_2, a_3代入：

```
In[]:=t /. {a1 -> {2, 5, 1, 3}, a2 -> {10, 1, 5, 10},
        a3 -> {4, 1, -1, 1}}
Out[]=
    {{a→{1, 2, 3, 4}}}
```

即$a=(1,2,3,4)$。

例 5.1.7 已知线性变换$\begin{cases} x_1=2y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=3y_1+y_2+5y_3 \\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3 \end{cases}$，求从变量$x_1,x_2,x_3$到变量$y_1,y_2,y_3$的线性变换。

该变换用矩阵表示为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$。

```
In[]:=Clear[A, x1, x2, x3, y1, y2, y3];
    A = {{2, 2, 1}, {3, 1, 5}, {3, 2, 3}};
    {{y1}, {y2}, {y3}} = Inverse[A].{{x1}, {x2}, {x3}};
Out[]=
    {{-7 x1 - 4 x2 + 9 x3}, {6 x1 + 3 x2 - 7 x3}, {3 x1 + 2 x2 - 4 x3}}
```

即线性变换为$\begin{cases} y_1=-7x_1-4x_2+9x_3 \\ y_2=6x_1+3x_2-7x_3 \\ y_3=3x_1+2x_2-4x_3 \end{cases}$。

例 5.1.8 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1=2y_1+y_3 \\ x_2=-2y_1+3y_2+2y_3 \\ x_3=4y_1+y_2+5y_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1=-3z_1+z_2 \\ y_2=2z_1+z_3 \\ y_3=-z_2+3z_3 \end{cases}$$

求从变量z_1,z_2,z_3到变量x_1,x_2,x_3的线性变换。

这两个线性变换用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

```
In[]:=Clear[A, B];
     A = {{2, 0, 1}, {-2, 3, 2}, {4, 1, 5}};
     B = {{-3, 1, 0}, {2, 0, 1}, {0, -1, 3}};
     {{y1}, {y2}, {y3}} = B.{{z1}, {z2}, {z3}};
     {{x1}, {x2}, {x3}} = A.{{y1}, {y2}, {y3}};
     Simplify[%]
Out[]=
     {{-6 z1 + z2 + 3 z3}, {12 z1 - 4 z2 + 9 z3}, {-10 z1 - z2 + 16 z3}}
```

即线性变换为$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}$。

实验内容

练习 1　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，

（1）求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$；

（2）若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{X}$；

（3）若 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{Y}$。

练习 2　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} u & v \\ y & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & v \end{pmatrix}$且 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，求 x, y, u, v 的值。

练习 3　计算

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -6 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$。

练习 4　已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + 3y_2 \\ x_3 = 4y_2 - y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = 2z_2 - 5z_3 \\ y_1 = 3z_1 + 7z_2 \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换。

练习 5　求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ $(abcd \neq 0)$;

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc \neq 0)$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$。

练习 6　解下列矩阵方程:

(1) $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$。

练习 7　已知 $f(x)=x^2-x-1, A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$。

实验 5-2　矩阵的初等变换

实验目的

掌握用 Mathematica 进行矩阵的初等变换，求矩阵的秩和向量组的秩、向量组的最大无关组的方法。

实验的基本理论与方法

向量组的线性相关性理论，矩阵的秩。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Det[A]**：求矩阵 A 的行列式。
2. **A.B**：求矩阵 A 与矩阵 B 的积。
3. **RowReduce[A]**：求矩阵 A 的行最简矩阵。
4. **MatrixForm[*Expr*]**：表示为矩阵形式。
5. **Simplify[%]**：化简上一结果。

实验指导

例 5.2.1　将矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$化为行最简形矩阵。

我们先用矩阵的行初等变换化矩阵为行最简形矩阵。

定义矩阵的行向量：

```
In[]:=Clear[r1, r2, r3, r4];
    r1 = {1, -1, 3, -4, 3};
    r2 = {3, -3, 5, -4, 1};
    r3 = {2, -2, 3, -2, 0};
    r4 = {3, -3, 4, -2, -1};
    A = {r1, r2, r3, r4}
```

下面对矩阵进行行初等变换，化为行最简形矩阵。

```
In[]:=r1
```

```
r2 = r2 - 3r1
r3 = r3 - 2r1
r4 = r4 - 3r1
Out[]=
{1, -1, 3, -4, 3}
{0, 0, -4, 8, -8}
{0, 0, -3, 6, -6}
{0, 0, -5, 10, -10}
In[]:=r1
r2 = r2/(-4)
r3 = r3/(-3)
r4 = r4/(-5)
Out[]=
{1, -1, 3, -4, 3}
{0, 0, 1, -2, 2}
{0, 0, 1, -2, 2}
{0, 0, 1,  2, 2}
In[]:=r1
r2
r3 = r3 - r2
r4 = r4 - r2
Out[]=
{1, -1, 3, -4, 3}
{0, 0, 1, -2, 2}
{0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0}
In[]:=r1 = r1 - 3r2
r2
r3
r4
Out[]=
{1, -1, 0, 2, -3}
{0, 0, 1, -2, 2}
{0, 0, 0, 0, 0}
{0, 0, 0, 0, 0}
```

即行最简形矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

还可以运用函数 **RowReduce[A]**可直接得到行最简形矩阵。

```
In[]:=Clear[r1, r2, r3, r4];
      r1 = {1, -1, 3, -4, 3};
      r2 = {3, -3, 5, -4, 1};
      r3 = {2, -2, 3, -2, 0};
      r4 = {3, -3, 4, -2, -1};
      A = {r1, r2, r3, r4};
      RowReduce[A];
      MatrixForm[%]
Out[]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 5.2.2 求矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$的秩及一个最高阶非零子式。

```
In[]:=Clear[r1, r2, r3, r4];
      r1 = {2, 1, 8, 3, 7};
      r2 = {2, -3, 0, -7, -5};
      r3 = {3, -2, 5, 8, 0};
      r4 = {1, 0, 3, 2, 0};
      A = {r1, r2, r3, r4};
      MatrixForm [RowReduce[A]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

取 1，2，3，4 行， 1，2，4，5 列作为矩阵 A，考察 4 阶子式$|A|$：

```
In[]:=A = {{2, 1, 3, 7}, {2, -3, -7, -5}, {3, -2, 8, 0}, {1, 0, 2, 0}};
      Det[A]
Out[]=
      196
```

可见秩为 4，最高阶非零子式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

例 5.2.3 观察给 A 左乘以一个初等矩阵等于对 A 施行一次行初等变换，矩阵 A 右乘一个初等矩阵等于对 A 施行一次列初等变换。

先看行的情况，首先定义矩阵 A：

```
In[]:=Clear[A, r1, r2, r3, r4];
    A = {{a11, a12, a13, a14}, {a21, a22, a23, a24}, {a31, a32, a33, a34}};
```

再定义初等矩阵 B_1, B_2, B_3：

```
In[]:=r1 = {1, 0, 0}; r2 = {0, 1, 0}; r3 = {0, 0, 1};    (* 单位矩阵的行向量 *)
    B1 = {r1, r3, r2};                                   (* 交换 2，3 行 *)
    B2 = {r1, r2 - r3, r3};                              (* 第 3 行乘以-1 加到第 2 行 *)
    B3 = {r1, 5r2, r3};                                  (* 第 2 行乘以 5 *)
```

下面观察 A 左乘以 B_1：

```
In[]:=MatrixForm[B1.A]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \\ a21 & a22 & a23 & a24 \end{pmatrix}$$

可见，B_1A 等于将 A 交换第 2，3 行后所得矩阵。观察 B_2 左乘 A：

```
In[]:=MatrixForm[B2.A]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ a21-a31 & a22-a32 & a23-a33 & a24-a34 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \end{pmatrix}$$

B_2A 等于将 A 的第 3 行乘以-1 后加到第 2 行所得矩阵。观察 B_3 左乘 A：

```
In[]:=MatrixForm[B3.A]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 \\ 5\,a21 & 5\,a22 & 5\,a23 & 5\,a24 \\ a31 & a32 & a33 & a34 \end{pmatrix}$$

B_3A 等于将 A 的第 2 行乘以 5 后所得矩阵。

下面看列的情况，定义初等矩阵 B_1, B_2, B_3：

```
In[]:=Clear[r1, r2, r3, r4, B1, B2, B3];
    r1 = {1, 0, 0, 0};
    r2 = {0, 1, 0, 0};
    r3 = {0, 0, 1, 0};
    r4 = {0, 0, 0, 1};
In[]:=B1 = {r1, r3, r2, r4};    (* 交换第 2，3 列 *)
    MatrixForm[B1]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[]:=B2 = {r1, r2 + 2r3, r3, r4};    (*第 2 列乘以 2 后加到第 3 列*)
     MatrixForm[B2]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[]:=B3 = {r1, -3r2, r3, r4};    (*给第 2 列乘以-3*)
     MatrixForm[B3]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

观察 $\boldsymbol{A}$ 右乘以 $\boldsymbol{B}_1$：

```
In[]:=MatrixForm[A.B1]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & a13 & a12 & a14 \\ a21 & a23 & a22 & a24 \\ a31 & a33 & a32 & a34 \end{pmatrix}$$

可见，$\boldsymbol{AB}_1$ 等于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列与第 3 列交换所得矩阵。观察 $\boldsymbol{B}_2$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 以：

```
In[]:=MatrixForm[A.B2]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & 2\,a12+a13 & a14 \\ a21 & a22 & 2\,a22+a23 & a24 \\ a31 & a32 & 2\,a32+a33 & a34 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}_2$ 等于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列乘以 2 后加到第 3 列所得矩阵。观察 $\boldsymbol{B}_3$ 右乘 $\boldsymbol{A}$：

```
In[]:=MatrixForm[A.B3]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} a11 & -3\,a12 & a13 & a14 \\ a21 & -3\,a22 & a23 & a24 \\ a31 & -3\,a32 & a33 & a34 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{AB}_3$ 等于将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列乘以－3 后所得矩阵。

例 5.2.4 求下列向量组的一个最大无关组：

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0,2,1),\ \boldsymbol{a}_2=(1,2,0,1),\ \boldsymbol{a}_3=(2,1,3,0),\ \boldsymbol{a}_4=(2,5,-1,4),\ \boldsymbol{a}_5=(1,-1,3,-1)$$

将向量组作为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，即

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$$

定义矩阵 A：

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3, a4, a5];
    a1 = {1, 0, 2, 1}; a2 = {1, 2, 0, 1}; a3 = {2, 1, 3, 0};
    a4 = {2, 5, -1, 4}; a5 = {1, -1, 3, -1};
    A = Transpose[{a1, a2, a3, a4, a5}];
    MatrixForm[A]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$$

将 A 化为行最简形矩阵：

```
In[]:=MatrixForm [RowReduce[A]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 A 的列向量组的秩为 3，最大无关组为 a_1,a_2,a_3。

例 5.2.5 试证由 $a_1=(0,1,1),a_2=(1,0,1),a_3=(1,1,0)$ 所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$。

验证 a_1,a_2,a_3 线性无关：

```
In[]:=Clear[A, a1, a2, a3];
    a1 = {0, 1, 1}; a2 = {1, 0, 1}; a3 = {1, 1, 0};
    A = {a1, a2, a3};
    Det[A]
Out[]=
    2
```

即 $|A|\neq 0$，说明 A 的行向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，4 个三维向量线性相关，因而任意三维向量都可以用这 3 个向量线性表示，故所生成的向量空间就是 $\mathbf{R}^3$。

例 5.2.6 验证 $a_1=(1,-1,0),a_2=(2,1,3),a_3=(3,1,2)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $v_1=(5,0,7)$，$v_2=(-9,-8,-13)$ 用这个基线性表示。

设 e_1,e_2,e_3 是基本单位向量，

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}5&0&7\\-9&-8&-13\end{pmatrix}$$

则有关系

$$(a_1,a_2,a_3)=(e_1,e_2,e_3)A^{\mathrm{T}}$$

$$(e_1,e_2,e_3)=(a_1,a_2,a_3)(A^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$(v_1,v_2)=(e_1,e_2,e_3)B^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,a_3)(A^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}}$$

定义矩阵，计算$|A|$：

```
In[]:=Clear[A, B];
    A = {{1, -1, 0}, {2, 1, 3}, {3, 1, 2}};
    B = {{5, 0, 7}, {-9, -8, -13}};
    Det[A]
Out[]=
    -6
```

说明矩阵 A 可逆。再输入

```
In[]:={e1, e2, e3} = {a1, a2, a3}.Inverse[Transpose[A]];
      {v1, v2} = {e1, e2, e3}.Transpose[B];
    Simplify[%]
Out[]=
    {2 a1 + 3 a2 - a3, 3 a1 - 3 a2 - 2 a3}
```

即

$$\begin{cases}v_1=2a_1+3a_2-a_3\\v_2=3a_1-3a_2-2a_3\end{cases}$$

也可以按照如下方法求解。先将a_1,a_2,a_3, v_1, v_2作为列向量，构造矩阵 M：

```
In[]:=Clear[A, B];
    A = {{1, -1, 0}, {2, 1, 3}, {3, 1, 2}};
    B = {{5, 0, 7}, {-9, -8, -13}};
    M = Transpose[Join[A, B]];
    MatrixForm[%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}$$

再将矩阵 M 化为行最简形矩阵：

```
In[]:=MatrixForm[RowReduce[M]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

即得
$$\begin{cases} v_1 = 2a_1 + 3a_2 - a_3 \\ v_2 = 3a_1 - 3a_2 - 2a_3 \end{cases}$$

例 5.2.7 设 $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

设
$$k_1\boldsymbol{b}_1 + k_2\boldsymbol{b}_2 + k_3\boldsymbol{b}_3 + k_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0}$$
即
$$k_1(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + k_2(\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) + k_3(\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4) + k_4(\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{0}$$
或
$$(k_1 + k_4)\boldsymbol{a}_1 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{a}_2 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{a}_3 + (k_3 + k_4)\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$$
下面考察方程组
$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

```
In[]:=Solve[{k2 + k3 == 0, k3 + k4 == 0, k1 + k4 == 0, k1 + k2 == 0},
          {k1, k2, k3, k4}]
Out[]=
     {{k1 → -k4, k2 → k4, k3 → -k4}}
```

亦即方程组有非零解，即 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

还可以采用如下方式证明。

设
$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)\boldsymbol{A}$$
其中
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
我们知道
$$R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) \le \min\{R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)\}$$
因此，若 $R(\boldsymbol{A}) < 4$，则 $R(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) < 4$，即可得出向量组 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ 线性相关。

```
In[]:=A = {{1, 0, 0, 1}, {1, 1, 0, 0}, {0, 1, 1, 0}, {0, 0, 1, 1}};
      Det[A]
Out[]=
      0
```

即 $|\boldsymbol{A}| = 0$，说明 $R(\boldsymbol{A}) < 4$，证毕。

实验内容

练习 1　将矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\2 & -2 & 4 & 2 & 0\\3 & 0 & 6 & -1 & 1\\0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$化为行最简形矩阵。

练习 2　求下列矩阵的秩:

（1）$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1 & 2\\0 & 2 & 2 & 2 & 0\\0 & -1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$;　　（2）$\begin{pmatrix}14 & 12 & 6 & 8 & 2\\6 & 104 & 21 & 9 & 17\\7 & 6 & 3 & 4 & 1\\35 & 30 & 15 & 20 & 4\end{pmatrix}$。

练习 3　求下列向量组的一个最大无关组:

（1）$\boldsymbol{a}_1=(1,1,3,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(-1,1,-1,3)$，$\boldsymbol{a}_3=(5,-2,8,-9)$，$\boldsymbol{a}_4=(-1,3,1,7)$；

（2）$\boldsymbol{a}_1=(1,1,2,3)$，$\boldsymbol{a}_2=(1,-1,1,1)$，$\boldsymbol{a}_3=(1,3,3,5)$，$\boldsymbol{a}_4=(4,-2,5,6)$，$\boldsymbol{a}_5=(-3,-1,-5,-7)$。

练习 4　已知向量$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$由向量$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$的线性表示式为

$$\boldsymbol{c}_1=3\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3$$
$$\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2+4\boldsymbol{b}_3$$

向量$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$由向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$的线性表示式为

$$\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$$
$$\boldsymbol{b}_3=-\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$$

求向量$\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2$由向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$的线性表示式。

练习 5　判断下列向量组是线性相关还是线性无关:

（1）$\boldsymbol{a}_1=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{a}_2=(-2,2,0)$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-5,2)$；

（2）$\boldsymbol{a}_1=(1,1,3,1)$，$\boldsymbol{a}_2=(3,-1,2,4)$，$\boldsymbol{a}_3=(2,2,7,-1)$。

练习 6　如果向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性无关，证明向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$线性无关。

实验 5-3　解线性方程组

实验目的

掌握用 Mathematica 求解线性方程组的方法。

实验的基本理论与方法

1. n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $R(A)<n$。

2. n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是 $R(A)=R(B)=r$（B 是增广矩阵）。当 $r=n$ 时，方程组有惟一解，当 $r<n$ 时，方程组有无穷多组解。

3. 克莱姆(Cramer)法则。

4. 用矩阵的初等变换求解线性方程组。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Det[A]**：求 A 的行列式。
2. **Inverse[A]**：求 A 的逆矩阵。
3. **A.B**：求矩阵 A,B 的积。
4. **RowReduce[A]**：求 A 的行最简矩阵。
5. **LinearSolve[A,b]**：给出方程组 $Ax=b$ 的解向量。
6. **NullSpace[A]**：给出方程组 $Ax=0$ 的基础解系。
7. **MatrixForm[*Expr*]**：表示为矩阵形式。

实验指导

例 5.3.1　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0\end{cases}$$

```
In[]:=Clear[A];
    A={{1,2,2,1},{2,1,-2,-2},{1,-1,-4,-3}};
    x={x1,x2,x3,x4};
    RowReduce[A]
```

Out[]=

$$\left\{\left\{1,0,-2,-\frac{5}{3}\right\},\left\{0,1,2,\frac{4}{3}\right\},\{0,0,0,0\}\right\}$$

由输出结果知方程组系数矩阵的秩为 2，故方程组有无穷多解且基础解系中有 2 个解向量。

```
In[]:=NullSpace[A]    (* 求方程组的基础解系 *)
Out[]=
{{5, -4, 0, 3}, {2, -2, 1, 0}}
```

故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1,c_2\text{是任意常数})$$

例 5.3.2 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}。$$

求系数矩阵的秩：

```
In[]:=Clear[A]
    A={{1,-2,3,-1},{3,-1,5,-3},{2,1,2,-2}}
    MatrixForm[RowReduce[A]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求增广矩阵的秩：

```
In[]:=Clear[B]
    B={{1,-2,3,-1,1},{3,-1,5,-3,2},{2,1,2,-2,3}}
    RowReduce[B];
    MatrixForm[%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩，故方程组无解。

另外也可以使用 **LinearSolve** 函数求解。

```
In[]:=A={{1,-2,3,-1},{3,-1,5,-3},{2,1,2,-2}};
     b={1,2,3}
     LinearSolve[A,b]
Out[]=
 LinearSolve::nosol : Linear equation encountered which has no solution.
```

信息提示方程组无解。

例 5.3.3 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}。$$

先求系数矩阵和增广矩阵的秩：

```
In[]:=Clear[B]
     B={{1,-1,-1,1,0},{1,-1,1,-3,1},{1,-1,-2,3,-1/2}}
     MatrixForm[RowReduce[B]]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩都等于 2，故方程组有无穷多解。

下面求方程组的通解。先求方程组的一个特解：

```
In[]:=b={0,1,-1/2};
     LinearSolve[A,b]
Out[]=
```

$$\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0\right\}$$

再求对应齐次方程组的基础解系：

```
In[]:=NullSpace[A]
Out[]=
     {{1, 0, 2, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad （c_1, c_2 \text{是任意常数}）$$

还可以用 **Solve** 函数求解：

```
In[]:=Clear[A, a1, a2, a3, b];
    a1 = {1, -1, -1, 1}; a2 = {1, -1, 1, -3}; a3 = {1, -1, -2, 3};
    b = {0, 1, -1/2}; x = {{x1}, {x2}, {x3}, {x4}};
    A = {a1, a2, a3};
    Solve[A.x == Transpose[{b}], {x1, x2, x3, x4}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{x1 \to \frac{1}{2} + x2 + x4,\ x3 \to \frac{1}{2} + 2\,x4\right\}\right\}$$

由输出结果知 x_2, x_4 为自由未知量，故方程组的通解为

$$x_1 = \frac{1}{2} + c_1 + c_2,\quad x_2 = c_1,\quad x_3 = \frac{1}{2} + 2c_2,\quad x_4 = c_2$$

例 5.3.4 设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda\end{cases}。$$

问 λ 取何值时，此方程（1）有惟一解；（2）无解；（3）有无穷多个解。在最后一种情况下，求其通解。

先确定 λ 的值，使系数行列式为零。

```
In[]:=A = {{1 + t, 1, 1}, {1, 1 + t, 1}, {1, 1, 1 + t}};
    Solve[Det[A] == 0, t]
Out[]=
    {{t → -3}, {t → 0}, {t → 0}}
```

可见，当 $\lambda \neq -3, \lambda \neq 0$ 时，系数行列式不等于零，方程组有惟一解。

```
In[]:=Clear[x1, x2, x3, x4, t];
    Solve[{(1 + t)x1 + x2 + x3 == 0, x1 + (1 + t)x2 + x3 == 3,
        x1 + x2 + (1 + t)x3 == t}, {x1, x2, x3}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{1}{t},\ x2 \to \frac{2}{t},\ x3 \to -\frac{1-t}{t}\right\}\right\}$$

此时，解为 $x_1 = -\dfrac{1}{\lambda}, x_2 = \dfrac{2}{\lambda}, x_3 = -\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$。

下面讨论 $\lambda = -3$ 时方程组的解。

```
In[]:=Clear[x1, x2, x3, x4];
    t = -3;
    Solve[{(1 + t)x1 + x2 + x3 == 0, x1 + (1 + t)x2 + x3 == 3,
        x1 + x2 + (1 + t)x3 == t}, {x1, x2}]
Out[]=
    {{x1 → -1 + x3, x2 → -2 + x3}}
```

可见，当$\lambda=-3$时有无穷多解。令$x_3=c$，方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-1+c \\ x_2=-2+c \end{cases} \quad (c\text{为任意常数})$$

最后讨论$\lambda=0$的情况。

```
In[]:=Clear[x1, x2, x3, x4];
    t = 0;
    Solve[{(1 + t)x1 + x2 + x3 == 0, x1 + (1 + t)x2 + x3 == 3,
          x1 + x2 + (1 + t)x3 == t}, {x1, x2, x3}]
Out[]=
     {}
```

即当$\lambda=0$时，方程组无解。

例 5.3.5 利用克莱姆法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}。$$

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则方程组可以表示为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$。

令

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad (\text{用}\boldsymbol{b}\text{代替}\boldsymbol{A}\text{的第一列})$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (\text{用}\boldsymbol{b}\text{代替}\boldsymbol{A}\text{的第二列})$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{用}\boldsymbol{b}\text{代替}\boldsymbol{A}\text{的第三列})$$

由克莱姆法则可得

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},x_3=\frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}|}$$

```
In[]:=a1 = {1, 2, 3}; a2 = {-1, -1, 2}; a3 = {-1, -3, -5}; b = {2, 1, 0};
    A = Transpose[{a1, a2, a3}];
    A1 = Transpose[{b, a2, a3}];
    A2 = Transpose[{a1, b, a3}];
    A3 = Transpose[{a1, a2, b}];
    x1 = Det[A1]/Det[A]
    x2 = Det[A2]/Det[A]
    x3 = Det[A3]/Det[A]
Out[]=
    5
    0
    3
```

即方程组有惟一解 $x_1=5, x_2=0, x_3=3$。

例 5.3.6 利用逆矩阵求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}。$$

设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则方程组用矩阵表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$。若 $|A|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，方程组有惟一的解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$。

定义矩阵 $\boldsymbol{A}$，并计算其行列式。

```
In[]:=Clear[A, x1, x2, x3, x4];
    A = {{1, 1, 1, 1}, {1, 2, -1, 4}, {2, -3, -1, -5}, {3, 1, 2, 11}};
    Det[A]
Out[]=
    -142
```

求方程组的解。

```
In[]:=b={{5}, {-2}, {-2}, {0}};
    Inverse[A].b
Out[]=
    {{1}, {2}, {3}, {-1}}
```

即方程组的解为 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=-1$。

实验内容

练习1 求解下列齐次线性方程组。

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$。

练习2 求解下列非齐次线性方程组。

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 5x_1+4x_2-3x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3 \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1 \end{cases}$。

练习3 设 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1 \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2 \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1 \end{cases}$，问 λ 为何值时，此方程组有惟一解、无解、有无穷多解？并求其解。

练习4 用 Cramer 法则求解线性方程组。

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

练习5 用逆矩阵求解线性方程组。

(1) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+3x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3-2x_4=6 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=2 \\ x_2+2x_3+3x_4=-2 \\ x_3+2x_4+3x_5=2 \end{cases}$

实验 5-4　相似矩阵及二次型

实验目的

1. 掌握用 Mathematica 求矩阵特征值、特征向量的方法。
2. 掌握用 Mathematica 将矩阵对角化的方法。
3. 掌握用 Mathematica 将二次型化为标准形的方法。

实验的基本理论与方法

1. 特征值、特征向量的概念和计算方法。
2. 矩阵可对角化的条件和结论。
3. 施密特正交化方法。
4. 二次型化为标准形的方法。
5. 正定二次型的判别方法。

实验使用的 Mathematica 函数

1. **Eigenvalues[A]**：求 A 的特征值。
2. **Eigenvectors[A]**：求 A 的特征向量。
3. **Transpose[{p1, p2, p3}]**：求矩阵 (p_1, p_2, p_3) 的转置矩阵。
4. **Inverse[P]**：求 P 的逆矩阵。
5. **JordanDecomposition[A]**：求 A 的相似变换矩阵及若当标准形。

实验指导

例 5.4.1　试用施密特正交化方法把向量组 $(a_1, a_2, a_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 正交化。

定义向量：

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3, b1, b2, b3];
    a1 = {1, 0, -1, 1}; a2 = {1, -1, 0, 1};
    a3 = {-1, 1, 1, 0};
```

下面利用施密特正交化方法，可以由向量组 a_1, a_2, a_3 得到正交向量组 b_1, b_2, b_3：

```
In[]:=b1 = a1
      b2 = a2 - b1.a2/b1.b1 b1
      b3 = a3 - b1.a3/b1.b1 b1 - b2.a3/b2.b2 b2
Out[]=
```

{1, 0, -1, 1}

$\left\{\frac{1}{3}, -1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

$\left\{-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

下面验证$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$两两正交：

```
In[]:=b1.b2
      b2.b3
      b3.b1
Out[]=
      0
      0
      0
```

例 5.4.2 判定下列矩阵是否为正交矩阵。

（1）$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3];
      a1 = {1/9, -8/9, -4/9}; a2 = {-8/9, 1/9, -4/9}; a3 = {-4/9, -4/9, 7/9};
      A={a1,a2,a3};
      MatrixForm [Transpose[A].A]
Out[]=
```

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

可见矩阵是正交矩阵。

（2）$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3,A];
    a1 = {1/2, 1/2,1/2,-1/2}; a2 = {-1/2, 1/2, 1/2,1/2};
    a3 = {1/2^(1/2), 1/2^(1/2), 0, 0}; a4 = {0,0,1/2^(1/2), 1/2^(1/2)}
    A={a1,a2,a3,a4};
    Tranpose[A].A ;
    MatrixForm [%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

可见，矩阵不是正交矩阵。

例 5.4.3 求下列矩阵的特征值和特征向量，并判别可否对角化。

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

```
In[]:=A = {{1, 2, 3}, {2, 1, 3}, {3, 3, 6}};
    Eigenvalues[A]
    Eigenvectors[A]
Out[]=
  {-1, 0, 9}
  {{-1, 1, 0}, {-1, -1, 1}, {1, 1, 2}}
```

即特征值分别是－1，0，9，对应的特征向量分别是$(-1,1,0)^T,(-1,-1,1)^T,(1,1,2)^T$。可见矩阵$A$存在3个线性无关的特征向量，故可以对角化。

（2）$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{-1, 1, 0}, {-4, 3, 0}, {1, 0, 2}};
    Eigenvalues[A]
    Eigenvectors[A]
Out[]=
  {1, 1, 2}
  {{-1, -2, 1}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}}
```

特征值分别是 1，1，2，对应的特征向量是$(-1,-2,1)^T,(0,0,1)^T$。可见矩阵 **A** 不存在 3 个线性无关的特征向量，故不能对角化。

（3）$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$，其中 $a_1a_2a_3a_4 \neq 0$

```
In[]:=Clear[A, a1, a2, a3, a4];
      A = {{a1, a2, a3, a4}};
      B = Transpose[A].A;
      Eigenvalues[B]
      Eigenvectors[B]
Out[]=
     {0, 0, 0, a1^2 + a2^2 + a3^2 + a4^2}
Out[]=
     {{-a4/a1, 0, 0, 1}, {-a3/a1, 0, 1, 0},
      {-a2/a1, 1, 0, 0}, {a1/a4, a2/a4, a3/a4, 1}}
```

由上面计算得到，特征值分别是 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$，对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_4}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1}{a_4} \\ \dfrac{a_2}{a_4} \\ \dfrac{a_3}{a_4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

故可以对角化。

例 5.4.4 试求一个相似变换矩阵，将下列矩阵化为对角矩阵。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

先求 **A** 的特征值和特征向量：

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{-2, 1, 1}, {0, 2, 0}, {-4, 1, 3}};
```

```
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
Out[]=
{-1, 2, 2}
Out[]=
{{1, 0, 1}, {1, 0, 4}, {1, 4, 0}}
```

即 A 有 3 个线性无关的特征向量，可以对角化，以这 3 个特征向量为列向量的矩阵即为相似变换矩阵 P。

```
In[]:=Clear[p1, p2, p3];
p1 = {1, 0, 1};p2 = {1, 0, 4};p3 = {1, 4, 0};
P =Transpose[{p1, p2, p3}]
Out[]=
{{1, 1, 1}, {0, 0, 4}, {1, 4, 0}}
```

即相似变换矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

下面验证 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵。

```
In[]:=Inverse[P].A.P;
MatrixForm [%]
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

即对角阵为

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

也可以输入程序直接得到相似变换矩阵和对角矩阵：

```
In[]:=Clear[A];
A = {{-2, 1, 1}, {0, 2, 0}, {-4, 1, 3}};
JordanDecomposition[A]
Out[]=
{{{1, 1, 1}, {0, 0, 4}, {1, 4, 0}},
 {{-1, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 2}}}
```

例 5.4.5 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称矩阵化为对角矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

先求 A 的特征值和特征向量：

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{2, 2, -2}, {2, 5, -4}, {-2, -4, 5}};
    Eigenvalues[A]
    Eigenvectors[A]
Out[]=
  {1, 1, 10}
Out[]=
  {{2, 0, 1}, {-2, 1, 0}, {-1, -2, 2}}
```

可见 A 有 3 个线性无关的特征向量，即可以对角化。下面将特征向量正交单位化：

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3, b1, b2, b3];
    a1 = {2, 0, 1}; a2 = {-2, 1, 0}; a3 = {-1, -2, 2};
    b1 = a1;
    b2 = a2 - b1.a2/b1.b1 b1;
    b3 = a3 - b1.a3/b1.b1 b1 - b2.a3/b2.b2 b2;
    p1 = b1/Sqrt[b1.b1]
    p2 = b2/Sqrt[b2.b2]
    p3 = b3/Sqrt[b3.b3]
Out[]=
```

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

$$\left\{-\frac{2}{3\sqrt{5}},\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\right\}$$

$$\left\{-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$$

以向量 p_1, p_2, p_3 为列向量的矩阵即为正交相似变换矩阵 P。

```
In[]:=P = Transpose[{p1, p2, p3}]
Out[]=
```

$$\left\{\left\{\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{3\sqrt{5}},\ -\frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ \frac{\sqrt{5}}{3},\ -\frac{2}{3}\right\},\ \left\{\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{3\sqrt{5}},\ \frac{2}{3}\right\}\right\}$$

即正交相似变换矩阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

下面验证 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵：

```
In[]:=Inverse[P].A.P;
      Simplify[%]
Out[]=
      {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 10}}
```

例 5.4.6 求一个正交变换将下面的二次型化成标准形：

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$$

二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

先求 A 特征值特征向量。

```
In[]:=Clear[A];
      A = {{1, 1, 0, -1}, {1, 1, -1, 0}, {0, -1, 1, 1}, {-1, 0, 1, 1}};
      Eigenvalues[A]
      Eigenvectors[A]
Out[]=
      {-1, 1, 1, 3}
Out[]=
      {{1, -1, -1, 1}, {0, 1, 0, 1}, {1, 0, 1, 0}, {-1, -1, 1, 1}}
```

再将特征向量正交规范化。

```
In[]:=Clear[a1, a2, a3, a4, b1, b2, b3, b4];
      a1 = {1, -1, -1, 1};a2 = {0, 1, 0, 1};a3 = {1, 0, 1, 0};a4 = {-1, -1, 1, 1};
      b1 = a1;
      b2 = a2 - b1.a2/b1.b1 b1;
      b3 = a3 - b1.a3/b1.b1 b1 - b2.a3/b2.b2 b2;
      b4 = a4 - b1.a4/b1.b1 b1 - b2.a4/b2.b2 b2 - b3.a4/b3.b3 b3;
      p1 = b1/Sqrt[b1.b1]
      p2 = b2/Sqrt[b2.b2]
      p3 = b3/Sqrt[b3.b3]
      p4 = b4/Sqrt[b4.b4]
```

Out[]=

$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

$\left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$

$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

以向量p_1, p_2, p_3, p_4为列向量的矩阵即为正交变换矩阵P，下面验证A可对角化。

```
In[]:=P =Transpose[{p1, p2, p3, p4}]
    B=Inverse[P].A.P;
    Simplify[%]
```

Out[]=

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Out[]=

```
{{-1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 3}}
```

下面验证f可化为标准型：

```
In[]:={{x1}, {x2}, {x3}, {x4}} = P.{{y1}, {y2}, {y3}, {y4}}
    f = {x1, x2, x3, x4}.A.{{x1}, {x2}, {x3}, {x4}};
    Simplify[%]
```

Out[]=

$$\left\{\left\{\frac{y1}{2} + \frac{y3}{\sqrt{2}} - \frac{y4}{2}\right\}, \left\{-\frac{y1}{2} + \frac{y2}{\sqrt{2}} - \frac{y4}{2}\right\}, \left\{-\frac{y1}{2} + \frac{y3}{\sqrt{2}} + \frac{y4}{2}\right\}, \left\{\frac{y1}{2} + \frac{y2}{\sqrt{2}} + \frac{y4}{2}\right\}\right\}$$

$\{-y1^2 + y2^2 + y3^2 + 3y4^2\}$

即所求的正交变换为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 + \frac{1}{2}y_4 \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

在此变换下二次型的标准形为 $f=-y_1^2+y_2^2+y_3^2+3y_4^2$。

例 5.4.7 判别下列二次型的正定性。

（1） $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$。

二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

下面分别求 A 的各阶主子式 $|A_1|,|A_2|,|A_3|$：

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{-2, 1, 1}, {1, -6, 0}, {1, 0, -4}};
    A1 = -2
    A2 = {{-2, 1}, {1, -6}};
    A3=A;
    Det[A2]
    Det[A3]
Out[]=
    -2
Out[]=
    11
Out[]=
    -38
```

A 的主子式分别为 −2,11,−38, 可见二次型是负定的。

（2） $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4+12x_3x_4$。

二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 9 & 6\\ 1 & -3 & 6 & 19\end{pmatrix}$$

以下分别求 A 的各阶主子式 $|A_1|,|A_2|,|A_3|,|A_4|$：

```
In[]:=Clear[A];
    A = {{1, -1, 2, 1}, {-1, 3, 0, -3}, {2, 0, 9, 6}, {1, -3, 6, 19}};
    A1 = 1
    A2 = {{1, -1}, {-1, 3}};
```

```
A3 = {{1, -1, 2}, {-1, 3, 0}, {2, 0, 9}};
A4=A;
Det[A2]
Det[A3]
Det[A4]
Out[]=
1
Out[]=
2
Out[]=
6
Out[]=
24
```

即 A 的主子行列式分别为1,2,6,24,故二次型是正定的。

实验内容

练习 1　将下列向量组正交化。

（1）$\alpha_1=(1,2,2,-1)^T,\alpha_2=(1,1,-5,3)^T,\alpha_3=(3,2,8,-7)^T$；

（2）$\alpha_1=(1,-2,2)^T,\alpha_2=(-1,0,-1)^T,\alpha_3=(5,-3,-7)^T$。

练习 2　判别下列矩阵是否为正交矩阵。

（1）$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$；　　（2）$Q=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$。

练习 3　求下列矩阵的特征值和特征向量。

（1）$\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$。

练习 4　判别下列矩阵是否可以对角化，若可以对角化，则求相似变换矩阵和对角阵。

（1）$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$；　（2）$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$；　（3）$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$。

练习 5　求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称矩阵化为对角矩阵。

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$；　　（2）$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$。

练习 6　求一个正交变换可以将下列二次型化成标准形。

（1）$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$；

（2）$f=2x_1x_2-2x_3x_4$；

（3）$f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$。

练习 7　求 a 的值，使下面的二次型为正定二次型。

（1）$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

（2）$f=5x_1^2+x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$。

附录　常见空间曲面的参数方程

一、 平面的参数方程

过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与向量 $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$ ，$\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$ 平行的平面方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + ul_1 + vl_2 \\ y = y_0 + um_1 + vm_2, \\ z = z_0 + un_1 + vn_2 \end{cases}$$ 其中 u, v 为参数。

二、 球面的参数方程

（1）　球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$ ，其中 $0\le\theta\le\pi, -\pi\le\varphi<\pi$ 为参数。

（2）　球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi \\ z = z_0 + R\cos\theta \end{cases}$$ ，其中 $0\le\theta\le\pi, -\pi\le\varphi<\pi$ 为参数。

三、椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$$ ，其中 $0\le\theta\le\pi, -\pi\le\varphi<\pi$ 为参数。

四、单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\sec u\cos v \\ y = b\sec u\sin v \\ z = c\tan u \end{cases}$$ 其中 u 与 v 为参数。

五、双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$的参数方程

$$\begin{cases} x = a\tan u\cos v \\ y = b\tan u\sin v \\ z = c\sec u \end{cases}$$，其中u与v为参数。

六、椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$的参数方程

$$\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = \frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$，其中u与v为参数。

七、 双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$的参数方程

$$\begin{cases} x = a(u+v) \\ y = b(u-v) \\ z = 2uv \end{cases}$$，其中u与v为参数。

八、 柱面的参数方程

以曲线

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$$

为准线，母线平行于向量$s=\{l,m,n\}$的柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(u)+lv \\ y = y(u)+mv \\ z = z(u)+nv \end{cases}$$，其中u与v为参数。

九、锥面的参数方程

以坐标原点$O(0,0,0)$为顶点，以曲线

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = z(u) \end{cases}$$

为准线，母线平行于向量 $s=\{l,m,n\}$ 的锥面的参数方程为

$$\begin{cases} x=vx(u)+l(1-v) \\ y=vy(u)+m(1-v) \\ z=vz(u)+n(1-v) \end{cases}，其中 u 与 v 为参数。$$

十、旋转曲面的参数方程

将曲线

$$\begin{cases} x=x(u) \\ y=y(u) \\ z=z(u) \end{cases}$$

绕 z 轴旋转，所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{[x(u)]^2+[y(u)]^2}\cos\alpha \\ y=\sqrt{[x(u)]^2+[y(u)]^2}\sin\alpha \\ z=z(u) \end{cases}，其中 u,\alpha 为参数。$$

参考文献

1 裘宗燕. Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计. 北京：北京大学出版社，1994

2 李心灿等.高等数学应用 205 例. 北京：高等教育出版社，1997

3 郭锡伯等.高等数学实验课讲义. 北京：中国标准出版社，1998

4 杨珏等. Mathematica 应用指南. 北京：人民邮电出版社，1999

5 李尚志等.数学实验. 北京：高等教育出版社，1999

6 上海交大等.一元微积分及其教学软件. 北京：科学出版社，1999

7 上海交大等.多元微积分及其教学软件. 北京：科学出版社，1999

8 谢云荪等. 数学实验. 北京：科学出版社，1999

9 周义仓等.数学建模实验.西安：西安交通大学出版社，1999

10 万中等. 数学实验. 北京：科学出版社，2001

11 杨振华等.数学实验. 北京：科学出版社，2002